ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ Γ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Να διατυπώσετε το θεώρημα του Fermat.

Μονάδες 3

Α2. Δίνεται ο παρακάτω ισχυρισμός:

«Εστω f μια συνάρτηση συνεχής σε ένα διάστημα Δ και δύο φορές παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ. Αν f κυρτή στο Δ τότε $f''(x) > 0$ για κάθε $x \in \Delta$.»

α) Να χαρακτηρίσετε τον ισχυρισμό αληθή ή ψευδή.

Μονάδες 1

β) Να αιτιολογήσετε την απάντηση σας στο Α2 (α) .

Μονάδες 3

Α3. Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο x_o , να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f + g είναι παραγωγίσιμη στο x_o και ισχύει :

$$(f+g)'(x_o) = f'(x_o) + g'(x_o)$$

Μονάδες 4

Α4. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f(x) = εφx είναι παραγωγίσιμη στο R_1= R-{ x | συνx = 0 } και ισχύει

$$f'(x) = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}.$$

Μονάδες 4

Α5. Να χαρακτηρίσετε κάθε μία από τις παρακάτω συναρτήσεις ως ΣΩΣΤΗ ή ΛΑΘΟΣ :

I. Έστω μια συνάρτηση f που είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ. Αν f ’(x) > 0 σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ τότε η f είναι γνησίως φθίνουσα σε όλο το Δ.

II. Τα εσωτερικά σημεία του διαστήματος Δ, στα οποία η f δεν παραγωγίζεται ή η παράγωγος της είναι ίση με το 0, λέγονται κρίσιμα σημεία της f.

III. Έστω συνάρτηση f ορισμένη και παραγωγίσιμη στο διάστημα [α,β] και σημείο $x_o \in [a,\beta]$ στο οποίο η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο. Τότε πάντα ισχύει ότι $f'(x_o)=0$.

IV. Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη σ'ένα διάστημα (α,β), με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του x_o, στο οποίο όμως η f είναι συνεχής. Αν $f'(x)>0$ στο (α, x_o) και $f'(x)<0$ στο (x_o,β), τότε το $f(x_o)$ είναι τοπικό ελάχιστο της f.

V. Αν μια συνάρτηση είναι συνεχής σ' ένα x_o του πεδίο ορισμού της, τότε είναι και παραγωγίσιμη σ' αυτό.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} x\cdot\ln^2 x+\alpha & \alpha\nu \ \ x>0 \\ e^a-1 & \alpha\nu \ \ x=0 \end{cases}$

B1. Να δείξετε ότι $\alpha=0$.

Μονάδες 4

B2. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

Μονάδες 7

B3. Να λυθεί η ανίσωση $f\left(x^4+2\right)<f\left(x^2+14\right)$.

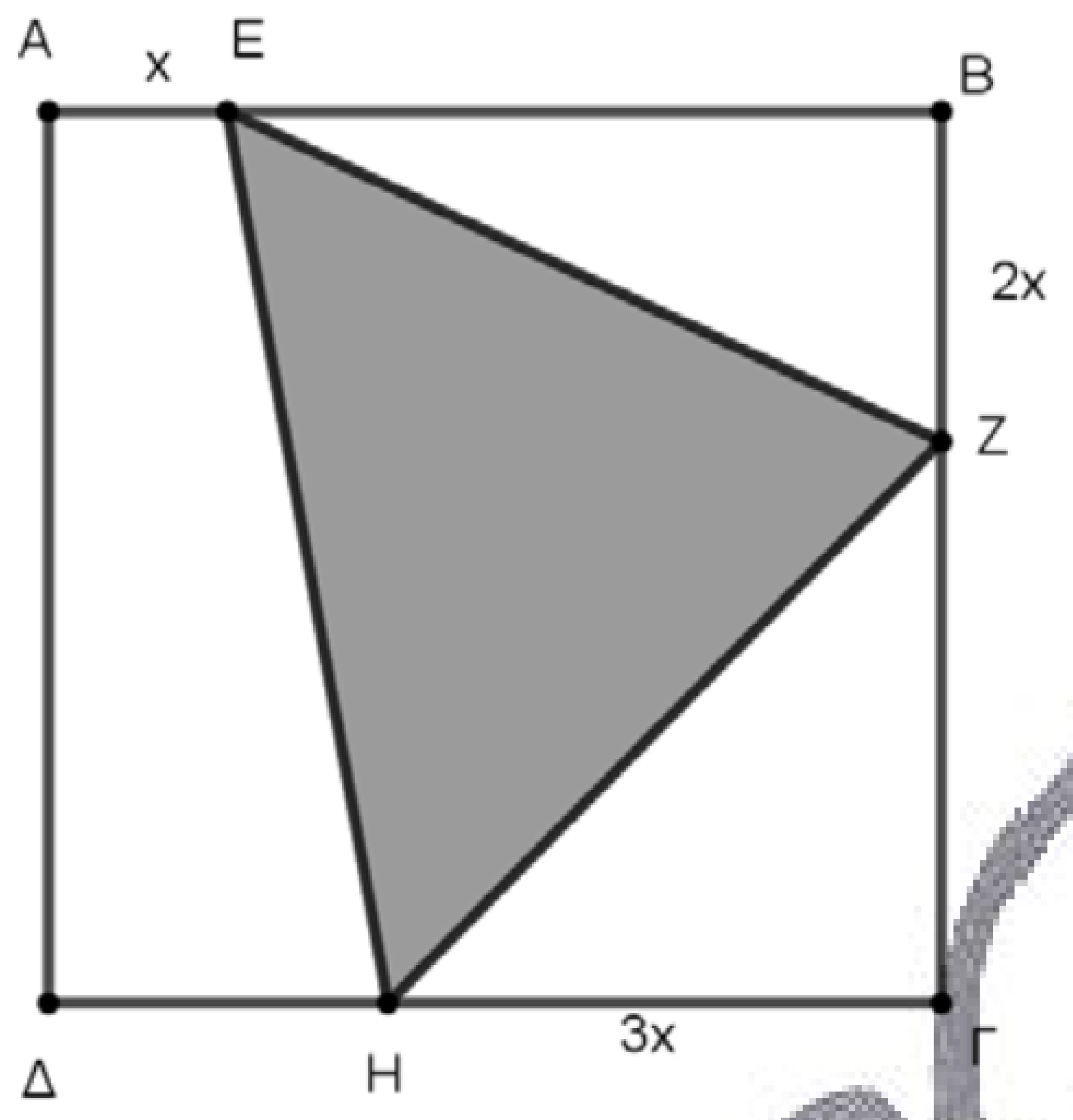
Μονάδες 7

B4. Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $\ln x=\dfrac{2021}{x\cdot\ln x}$

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται τετράγωνο ΑΒΓΔ πλευράς 4cm. Στην πλευρά ΑΒ παίρνουμε σημείο Ε έτσι ώστε $AE=x$, στην πλευρά ΒΓ παίρνουμε σημείο Z έτσι ώστε $BZ=2x$ και στην πλευρά ΓΔ παίρνουμε σημείο Η έτσι ώστε $\Gamma H=3x$, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα:



Γ1. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του τριγώνου ΕΖΗ συναρτήσει του x, δίνεται από τη συνάρτηση

$$E(x) = 4x^2 - 6x + 8 \ , \ 0 < x < \frac{4}{3}$$

Μονάδες 9

Γ2. Να βρείτε την ελάχιστη τιμή που μπορεί να πάρει το εμβαδόν του τριγώνου ΕΗΖ.

Μονάδες 8

Γ3 . Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδική τιμή του xγια την οποία το εμβαδόν του τριγώνου EHZ γίνεται ίσο με $\frac{e^3 + \pi}{3}$ (Δίνεται ότι $e^3 = 19,7$)

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x \cdot e^{1-x}$, $x \in \mathbb{R}$.

Δ1. Να εξετάσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα και να αποδείξετε ότι C_f τέμνει τον x’x σε ένα ακριβώς σημείο.

Μονάδες 4

Δ2. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής.

Μονάδες 4

Δ3. Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{1}{f(x)-2e^2x-e^2}$

Μονάδες 5

Δ4. Για κάθε $\alpha,\beta\in(-\infty,0)$ με $\alpha<\beta$, να αποδείξετε ότι $\dfrac{(1-\alpha)(\beta-\alpha)+\alpha}{e^{\alpha}}>\dfrac{\beta}{e^{\beta}}$

Μονάδες 7

Δ5. Ένα κινητό σημείο Μ κινείται κατά μήκος της γραφικής παράστασης της f .Καθώς το Μ περνάει από το $\mathrm{A}(1,1)$ η τετμημένη του ελαττώνεται με ρυθμό 2 μονάδες ανά δευτερόλεπτο. Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της γωνίας $\varphi=\widehat{MOx}$, τη χρονική στιγμή που το Μ περνάει από το Α.

Μονάδες 5

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Σελίδα 142 σχολικό

Α2. α) Ψευδής

β) Σελίδα 156 σχολικό

Α3. Σελίδα 111 σχολικό

Α4. Σελίδα 114 σχολικό

Α5. Να χαρακτηρίσετε κάθε μία από τις παρακάτω συναρτήσεις ως ΣΩΣΤΗ ή ΛΑΘΟΣ :

Ι.Λ ΙΙ.Σ ΙΙΙ.Λ ΙV.Λ V.Λ

ΘΕΜΑ Β

Β1. Επειδή η f είναι συνεχής στο $[0,+\infty)$,θα είναι και στο 0,άρα

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=f(0)$ **(1)**

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\left[x\cdot\ln^2 x+\alpha\right]=\alpha$, διότι

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+}\left[x\cdot \ln^2 x\right] = \lim_{x\to 0^+}\left[\frac{\ln^2 x}{\frac{1}{x}}\right] \overset{\frac{+\infty}{+\infty}}{\underset{DLH}{=}} \lim_{x\to 0^+}\left[\frac{(\ln^2 x)'}{(\frac{1}{x})'}\right] = \lim_{x\to 0^+}\left[\frac{2\ln x\cdot(\ln x)'}{-\frac{1}{x^2}}\right] =$$

$$= \lim_{x\to 0^+}\left[\frac{\frac{2\ln x}{x}}{-\frac{1}{x^2}}\right] = \lim_{x\to 0^+}\left[\frac{-2\ln x}{\frac{1}{x}}\right] \overset{\frac{-\infty}{+\infty}}{\underset{DLH}{=}} \lim_{x\to 0^+}\left[\frac{(-2\ln x)'}{(\frac{1}{x})'}\right] = \lim_{x\to 0^+}\left[\frac{\frac{-2}{x}}{-\frac{1}{x^2}}\right] = \lim_{x\to 0^+}(2x) = 0$$

$f(0) = e^{\alpha} - 1$. Οπότε η (1) γίνεται $e^{\alpha} - 1 = \alpha \Rightarrow a = 0$, αφού $e^x \geq x+1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$,με την ισότητα να ισχύει για $x = 0$

B2. Για α=0 προκύπτει $f(x) = \begin{cases} x\cdot \ln^2 x & \alpha\nu\ \ x>0 \\ 0 & \alpha\nu\ \ x=0 \end{cases}$

Για $x>0$ έχω

$$f'(x) = (x)'\ln^2 x + x(\ln^2 x)' = \ln^2 x + 2x\ln x(\ln x)' = \ln^2 x + 2\ln x = \ln x(\ln x + 2)$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \ln x = 0 \ \ ή\ \ \ln x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = 1\ ή\ \ x = e^{-2}$$

x	**0**	e^{-2}	**1** $+\infty$
lnx	−	−	+
lnx+2	−	+	+
f’	+	−	+
f	↗	↘	↗

$\ln x + 2 > 0 \Leftrightarrow \ln x > \ln e^{-2} \Leftrightarrow x > e^{-2}$
$\ln x + 2 < 0 \Leftrightarrow \ln x < \ln e^{-2} \Leftrightarrow 0 < x < e^{-2}$

Η f είναι γνησίως αύξουσα στα διαστήματα $\left[0, e^{-2}\right]$, $[1,+\infty]$.

Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $\left[e^{-2},1\right]$.

Η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο $x_1 = e^{-2}$ τo $f\left(e^{-2}\right) = \frac{4}{e^2}$ αντίστοιχα.

Η f παρουσιάζει ελάχιστα στα $x_2 = 0$ τo $f(0) = 0$ $\kappa\alpha\iota$ $\sigma\tau o$ $x_3 = 1$ τo $f(1) = 0$.

Β3. Επειδή $x^4+2>1$ *και* $x^2+14>1$ άρα $(x^4+2),(x^2+14)\in[1,+\infty)$ και η f γνησίως αύξουσα στο $[1,+\infty)$,τότε προκύπτει

$$f\left(x^4+2\right)<f\left(x^2+14\right)\overset{\nearrow}{\Rightarrow} x^4+2<x^2+14\Rightarrow x^4-x^2-12<0$$

θέτοντας $x^2=\kappa$ έχουμε $\kappa^2-\kappa-12<0\Rightarrow -3<\kappa<4$

άρα $x^2>-3$ που ισχύει για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και $x^2<4\Rightarrow -2<x<2$

Β4. Έστω $\Delta_1=[0,e^{-2})$, $\Delta_2=\left[e^{-2},1\right]$, $\Delta_3=(1,+\infty)$.

• Η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο Δ_1 ,άρα

$$f(\Delta_1)=\left[f(0),\lim_{x\to\frac{1}{e^2}^-}f(x)\right)=\left[0,\frac{4}{e^2}\right)$$ αφού

• $\lim\limits_{x\to\frac{1}{e^2}^-}f(x)=\lim\limits_{x\to\frac{1}{e^2}^-}(x\cdot\ln^2 x)=\frac{4}{e^2}$

• Η f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο Δ_2 ,άρα

$$f(\Delta_2)=\left[f(1),f\left(e^{-2}\right)\right]=\left[0,\frac{4}{e^2}\right]$$

• Η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο Δ_3 ,άρα

$$f(\Delta_3)=\left(\lim_{x\to1^+}f(x),\lim_{x\to+\infty}f(x)\right)=(0,+\infty)$$

• $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(x\cdot\ln x)=+\infty$

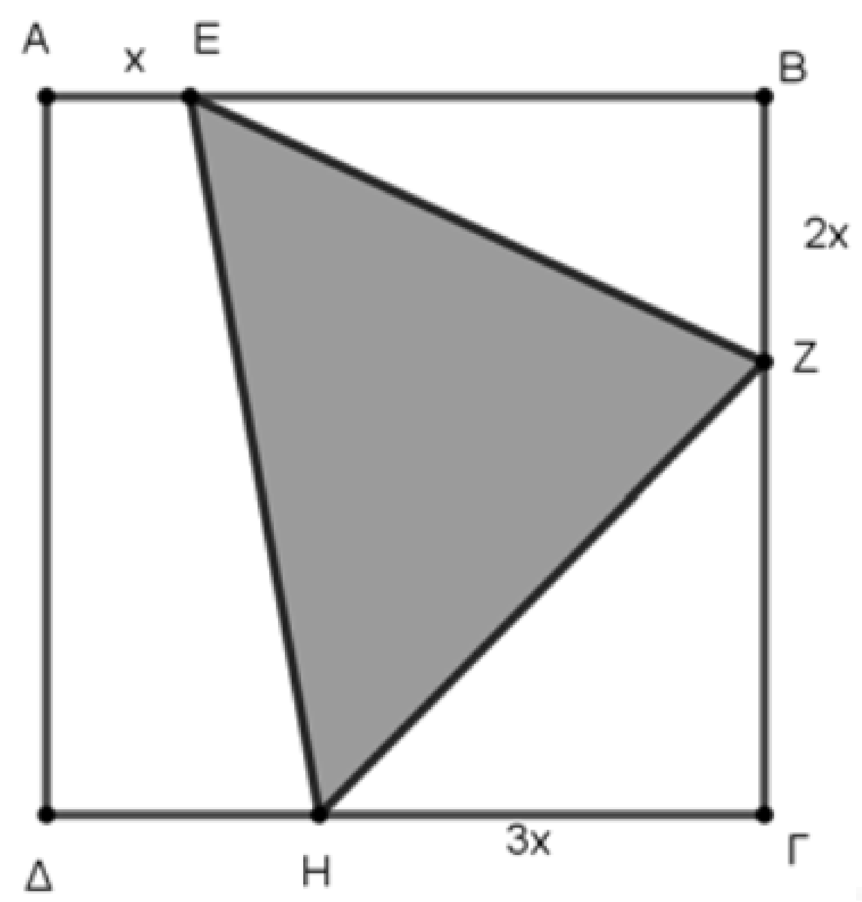
Η εξίσωση γίνεται $\ln x=\dfrac{2021}{x\cdot\ln x}\Leftrightarrow x\cdot\ln^2 x=2021\Leftrightarrow f(x)=2021$

Επειδή $2021\notin f(\Delta_1)$, $2021\notin f(\Delta_2)$ η $f(x)=2021$ δεν έχει ρίζες στα Δ_1,Δ_2

Επειδή $2021\in f(\Delta_3)$ και η f γνησίως αύξουσα στο Δ_3 ,τότε η $f(x)=2021$ θα έχει μοναδική ρίζα στο Δ_3 .

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Αρχικά θα κάνουμε το σχήμα



Είναι $EB = 4 - x$, $\Gamma Z = 4 - 2x$ και $\Delta H = 4 - 3x$.

Προφανώς ισχύουν $0 < x < 4$ και $4 - x > 0 \Leftrightarrow x < 4$, $4 - 2x > 0 \Leftrightarrow x < 2$, $4 - 3x > 0 \Leftrightarrow x < \frac{4}{3}$.

Οπότε $0 < x < \frac{4}{3}$.

Είναι $(EHZ) = (AB\Gamma\Delta) - (BEZ) - (ZH\Gamma) - (AEH\Delta)$ (1)

- $(AB\Gamma\Delta) = 4^2 = 16$
- $(EBZ) = \frac{1}{2}(4 - x)\cdot 2x = 4x - x^2$
- $(ZH\Gamma) = \frac{1}{2}(4 - 2x)\cdot 3x = 3x\cdot(2 - x) = 6x - 3x^2$
- $(AEH\Delta) = \frac{(x + 4 - 3x)\cdot 4}{2} = 2(4 - 2x) = 8 - 4x$

Οπότε $(1) \Leftrightarrow (EHZ) = 16 - 4x + x^2 - 6x + 3x^2 - 8 + 4x = 4x^2 - 6x + 8$.

Επομένως το εμβαδόν του τριγώνου ΕΗΖ δίνεται από τη συνάρτηση $E(x) = 4x^2 - 6x + 8$, $0 < x < \frac{4}{3}$.

Γ2. Είναι $E'(x) = 8x - 6$.

$E'(x) = 0 \Leftrightarrow 8x - 6 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3}{4}$

$E'(x) > 0 \Leftrightarrow 8x - 6 > 0 \Leftrightarrow x > \frac{3}{4}$

$E'(x) < 0 \Leftrightarrow 8x - 6 < 0 \Leftrightarrow x < \frac{3}{4}$

x	0 $\quad\quad$ $\frac{3}{4}$	$\frac{4}{3}$
$E'(x)$	$-$	$+$
$E(x)$	$\searrow$	$\nearrow$

Η ελάχιστη τιμή που μπορεί να πάρει το εμβαδόν είναι $E\left(\frac{3}{4}\right)=\frac{23}{4}$ τετρ.μον.

Γ3. Η $E(x)$ είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο $\Delta_1=\left(0,\frac{3}{4}\right]$, άρα

$$E(\Delta_1)=\left[E\left(\frac{3}{4}\right),\lim_{x\to 0^+}E(x)\right)=\left[\frac{23}{4},8\right) .$$

$8=\frac{24}{3}>\frac{e^3+\pi}{3}>\frac{23}{4}=5,75$, άρα $\frac{e^3+\pi}{3}\in E(\Delta_1)$ και επειδή $E\downarrow\Delta_1$ θα υπάρχει μοναδικό $x_1\in\Delta_1$ τέτοιο ώστε $E(x_1)=\frac{e^3+\pi}{3}$.

Η $E(x)$ είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $\Delta_2=\left(\frac{3}{4},\frac{4}{3}\right)$, άρα

$$E(\Delta_2)=\left(\lim_{x\to\frac{3}{4}^+}E(x),\lim_{x\to\frac{4}{3}^-}E(x)\right)=\left(\frac{23}{4},\frac{64}{9}\right).$$

$\frac{e^3+\pi}{3}=\frac{3\left(e^3+\pi\right)}{9}\approx\frac{3\cdot 22,84}{9}>\frac{64}{9}$, άρα $\frac{e^3+\pi}{3}\notin E(\Delta_2)$. Οπότε δεν υπάρχει $x_2\in\Delta_2$ τέτοιο ώστε $E(x_2)=\frac{e^3+\pi}{3}$.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ και επίσης για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι :

$f'(x)=e^{1-x}+x\cdot e^{1-x}\cdot(1-x)'=e^{1-x}-x\cdot e^{1-x}=e^{1-x}(1-x)$

- $f'(x)=0\Leftrightarrow e^{1-x}(1-x)=0\Leftrightarrow x=1$
- $f'(x)>0\Leftrightarrow e^{1-x}(1-x)>0\overset{e^{1-x}>0}{\Leftrightarrow}1-x>0\Leftrightarrow x<1$
- $f'(x)<0\Leftrightarrow e^{1-x}(1-x)<0\overset{e^{1-x}>0}{\Leftrightarrow}1-x<0\Leftrightarrow x>1$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$	+		-
$f(x)$	↗		↘

Σύμφωνα με τα παραπάνω η f είναι :

- γνησίως αύξουσα στο $(-\infty,1]$
- γνησίως φθίνουσα στο $[1,+\infty)$

Επίσης η f παρουσιάζει μέγιστο στο $x_0=1$ το $f(1)=1$.

Η C_f τέμνει τον x’x σε ένα ακριβώς σημείο αν και μόνο αν η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μοναδική ρίζα.

Στο $\Delta_1=(-\infty,1]$ η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα, άρα $f(\Delta_1)=\left(\lim\limits_{x\to-\infty} f(x), f(1)\right]$.

Είναι $f(1)=1$ και $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x\cdot e^{1-x}\right)=-\infty$, αφού $\lim\limits_{x\to-\infty} x=-\infty$ και $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{1-x} \overset{u=1-x}{=} \lim\limits_{u\to+\infty} e^{u}=+\infty$.

Άρα $f(\Delta_1)=(-\infty,1]$.

Το $0\in f(\Delta_1)$ και επειδή $f\downarrow\Delta_1$, υπάρχει μοναδικό $x_1\in\Delta_1$ τέτοιο ώστε $f(x_1)=0$.

Στο $\Delta_2=(1,+\infty)$ η f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα, άρα $f(\Delta_2)=\left(\lim\limits_{x\to+\infty} f(x), \lim\limits_{x\to1^+} f(x)\right)$.

Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x\cdot e^{1-x}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{e^{x-1}} \underset{DLH}{\overset{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{=}} \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(x)'}{\left(e^{x-1}\right)'}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{e^{x-1}}=0$ και $\lim\limits_{x\to1^+} f(x)=f(1)=1$.

Άρα $f(\Delta_2)=(0,1)$.

Το $0\notin f(\Delta_2)$,, άρα δεν υπάρχει $x_2\in\Delta_2$ τέτοιο ώστε $f(x_2)=0$.

Τελικά η εξίσωση $f(x)=0$ έχει ακριβώς μία ρίζα.

Δ2. Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι

$$f''(x)=-e^{1-x}+(1-x)\cdot e^{1-x}(1-x)'=-e^{1-x}-(1-x)e^{1-x}=e^{1-x}(x-2)$$

- $f''(x)=0 \Leftrightarrow e^{1-x}(x-2)=0 \Leftrightarrow x=2$
- $f''(x)>0 \Leftrightarrow e^{1-x}(x-2)>0 \overset{e^{1-x}>0}{\Leftrightarrow} x-2>0 \Leftrightarrow x>2$
- $f''(x)<0 \Leftrightarrow e^{1-x}(x-2)<0 \overset{e^{1-x}>0}{\Leftrightarrow} x-2<0 \Leftrightarrow x<2$

x	$-\infty$ 2	$+\infty$
$f'(x)$	-	+
$f(x)$	$\cap$	$\cup$

Σύμφωνα με τα παραπάνω η f είναι κοίλη στο $(-\infty,2]$, κυρτή στο $[2,+\infty)$ και το σημείο $A(2,f(2))$, δηλαδή το σημείο $A\left(2,\dfrac{2}{e}\right)$ είναι σημείο καμπής της C_f .

Δ3. Είναι $\lim\limits_{x\to-1}\left(f(x)-2e^2x-e^2\right)=0$.

Η εφαπτομένη της C_f στο σημείο της $B(-1,f(-1))$ έχει εξίσωση

$$y-f(-1)=f'(-1)(x+1) \Leftrightarrow y+e^2=2e^2(x+1) \Leftrightarrow y=2e^2x+e^2$$

και επειδή η f είναι κοίλη στο $(-\infty,2]$ θα ισχύει $f(x)\le 2e^2x+e^2 \Leftrightarrow f(x)-2e^2x-e^2\le 0$ για κάθε $x\in(-\infty,2]$ με την ισότητα να ισχύει μόνο για $x=-1$.

Άρα για x κοντά στο -1 είναι $f(x)-2e^2x-e^2<0$ και επομένως $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{1}{f(x)-2e^2x-e^2}=-\infty$

Δ4. Έχουμε ισοδύναμα :

$$\begin{aligned}\frac{(1-\alpha)(\beta-\alpha)+\alpha}{e^{\alpha}}>\frac{\beta}{e^{\beta}} &\Leftrightarrow e^{-\alpha}\left[(1-\alpha)(\beta-\alpha)+\alpha\right]>\beta\cdot e^{-\beta}\\ &\overset{\cdot e}{\Leftrightarrow} e^{1-\alpha}\left[(1-\alpha)(\beta-\alpha)+\alpha\right]>\beta\cdot e^{1-\beta}\\ &\Leftrightarrow e^{1-\alpha}(1-\alpha)(\beta-\alpha)+\alpha\cdot e^{1-\alpha}>\beta\cdot e^{1-\beta}\\ &\Leftrightarrow e^{1-\alpha}(1-\alpha)(\beta-\alpha)>\beta\cdot e^{1-\beta}-\alpha\cdot e^{1-\alpha}\\ &\Leftrightarrow e^{1-\alpha}(1-\alpha)(\beta-\alpha)>f(\beta)-f(\alpha)\\ &\overset{\beta-\alpha>0}{\Leftrightarrow} e^{1-\alpha}(1-\alpha)>\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha} \qquad (1)\end{aligned}$$

Αρκεί λοιπόν να αποδείξουμε τη σχέση (1) .

Για την fισχύουν οι υποθέσεις του ΘΜΤ στο διάστημα $[\alpha,\beta]$, άρα υπάρχει $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi)=\dfrac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}$.

Είναι $f''(x)<0$ για κάθε $x\in(-\infty,2)$, άρα η f' είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty,2]$ και επομένως η $f'\downarrow(\alpha,\beta)$. Έχουμε λοιπόν :

$\xi\in(\alpha,\beta)$ άρα $\alpha<\xi \overset{f'\downarrow}{\Rightarrow} f'(\alpha)>f'(\xi)\Rightarrow(1-\alpha)\cdot e^{1-\alpha}>\dfrac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}$

Δ5. Έστω $M(x,y)$ ένα κινητό σημείο και $y=x\cdot e^{1-x}$.Τη χρονική στιγμή t έχουμε: $M\left(x(t),y(t)\right)$ και $y(t)=x(t)\cdot e^{1-x(t)}$.

Τη χρονική στιγμή που το M περνάει από το $A(1,1)$ έχουμε:

$x(t_o)=1$, $y(t_o)=1$ και $x'(t_o)=-2$

Έχουμε : $\varepsilon\varphi\theta(t)=\dfrac{y(t)}{x(t)}=\dfrac{x(t)\cdot e^{1-x(t)}}{x(t)}=e^{1-x(t)}$.Παραγωγίζοντας κατά μέλη προκύπτει:

$$\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\theta(t)}\cdot\theta'(t)=-e^{1-x(t)}\cdot x'(t)\Rightarrow\left(1+\varepsilon\varphi^2\theta(t)\right)\cdot\theta'(t)=-e^{1-x(t)}\cdot x'(t)$$

Για $t=t_o$ έχω

$$\left(1+\varepsilon\varphi^2\theta(t_o)\right)\cdot\theta'(t_o) = -e^{1-x(t_o)}\cdot x'(t_o) \Rightarrow 2\cdot\theta'(t_o) = 2 \Rightarrow \theta'(t_o) = 1\ rad/s$$

$$,\mu\varepsilon\quad \varepsilon\varphi\theta(t_o) = e^{1-x(t_o)} = 1$$