ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ

Μαθηματικά Προσανατολισμού Γ Λυκείου

ΘΕΜΑ Α

Α1. Να διατυπώσετε το θεώρημα ενδιάμεσων τιμών

Μονάδες 4

Α2. Δίνεται ο παρακάτω ισχυρισμός:

«Αν η f είναι συνεχής στα Α και Β και $f'(x)=0$ στα εσωτερικά των Α και Β, τότε η f είναι σταθερή στο $A \cup B$.»

α) Να χαρακτηρίσετε τον ισχυρισμό αληθή ή ψευδή.

Μονάδες 1

β) Να αιτιολογήσετε την απάντηση σας στο Α2 (α) .

Μονάδες 3

Α3. Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα $(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})$, με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του x_o στο οποίο όμως η f είναι συνεχής. Να αποδείξετε ότι :

Αν $f'(x)>0$ στο (α, x_o) και $f'(x)<0$ στο (x_o,β) , τότε το $f(x_o)$ είναι τοπικό μέγιστο της f.

Μονάδες 7

Α5. Να χαρακτηρίσετε κάθε μία από τις παρακάτω συναρτήσεις ως ΣΩΣΤΗ ή ΛΑΘΟΣ :

I. Αν $\lim\limits_{x\to x_o} f(x)>0$ τότε $f(x)>0$ κοντά στο x_o.

II. Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και δεν είναι αντιστρέψιμη , τότε υπάρχει κλειστό διάστημα [α,β], στο οποίο η f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle.

III. Έστω συνάρτηση f ορισμένη και παραγωγίσιμη στο διάστημα [α,β] και σημείο $x_o \in [a,\beta]$ στο οποίο η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο. Τότε πάντα ισχύει ότι $f'(x_o)=0$.

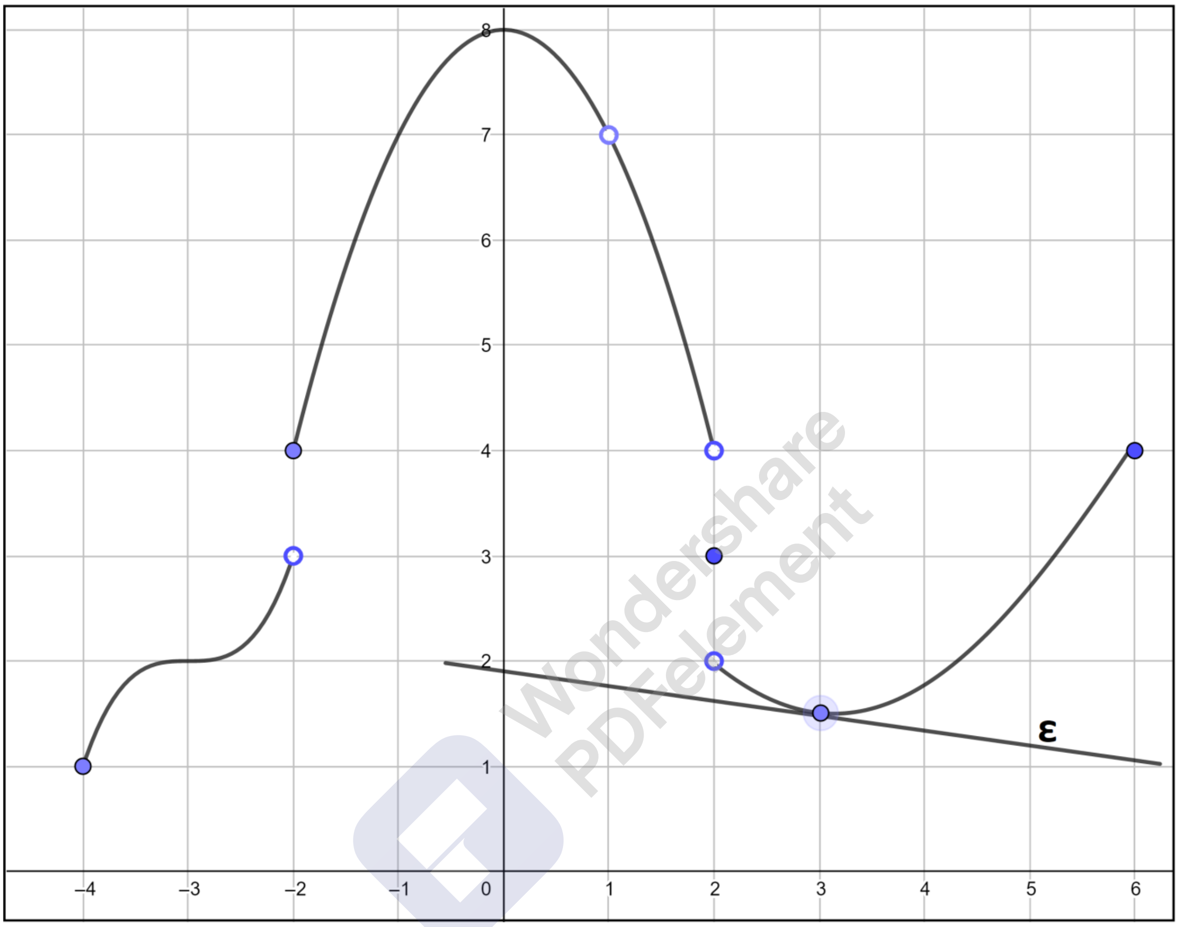
IV. Αν οι συναρτήσεις f,g είναι παραγωγίσιμες στο x_o, τότε η συνάρτηση $f\cdot g$ είναι παραγωγίσιμη στο x_o και ισχύει $(f\cdot g)'(x)=f'(x)\cdot g'(x)$.

V. Αν η f είναι συνεχής στο [α,β] με $f(\alpha)<0$ και υπάρχει $\xi \in (\alpha,\beta)$ ώστε $f(\xi)=0$, τότε κατ' ανάγκη $f(\beta)>0$.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης f, καθώς και η εφαπτομένη της, ε: $x+6y-12=0$, στο $x_o=3$.Αν γνωρίζετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $x=0$,τότε:



Β1. Να βρείτε το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της f.

Μονάδες 4

Β2. Να υπολογίσετε αν υπάρχουν, τα παρακάτω όρια. Για τα όρια που δεν υπάρχουν να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

i) $\lim\limits_{x\to -4} f(x)$ ii) $\lim\limits_{x\to -2} f(x)$ iii) $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ iv) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x)-8}{x}$

Μονάδες 7

Β3.Να υπολογίσετε τα όρια:

i) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-1}{2f(x)-16}$ ii) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{1}{6f(x)+x-12}$

Μονάδες 6

Β4. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\dfrac{f(\alpha)-8}{x-1}-\dfrac{f(\beta)-1}{x-3}=0$, $\alpha,\beta\in(-4,0)$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο διάστημα $(1,3)$.

Μονάδες 4

Β5.Να βρείτε τα σημεία στα οποία η f δεν είναι συνεχής. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Μονάδες 4

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται $f(x)=\begin{cases}(2\beta+1)e^{x-1}+\alpha x^2+\beta x, & x\ge 1\\ -\alpha\sigma\upsilon\nu(x-1)+(\alpha+2)x+\beta, & 0\le x<1\end{cases}$, η οποία είναι παραγωγίσιμη.

Γ1.Να αποδείξετε ότι α = 1 και β = 0.

Μονάδες 6

Γ2. Αν Ε είναι το εμβαδόν του χωρίου που σχηματίζεται από την εφαπτομένη της C_f στο $x_o=1$, και τους άξονες x'x και y'y , να συγκρίνετε τις τιμές $f'(E)$ και $f'(\frac{\pi}{18})$.

Μονάδες 7

Γ3 .Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{e^{x-1}}{2f(x)-6x+2}$.

Μονάδες 6

Γ4. Να δείξετε ότι $f(x^2)-f(x)>(x^2-x)f'(x)$ για κάθε $x>1$.

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ η οποία είναι δύο φορές παραγωγίσιμη και για την οποία ισχύουν

· $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+2h)-2f(x)+f(x-2h)}{h^2}=4e^x-8$

· $f'(0)=2$ και $f(0)=1$

Δ1. Να δείξετε ότι $f(x)=e^x-x^2+x$.

Μονάδες 7

Δ2. Να μελετήσετε τη μονοτονία της f.

Μονάδες 5

Δ3. Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $\xi\in(1,3)$ ώστε η εφαπτομένη της C_f να διέρχεται από το A(1,0)

Μονάδες 6

Δ4. Έστω η συνάρτηση $h(x)=\left(f(x)+x^2-x-1\right)^2(x-2)^2$. Να αποδείξετε ότι η h έχει δύο θέσεις τοπικών ελαχίστων και μία θέση τοπικού μεγίστου.

Μονάδες 7

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Σελίδα 76 σχολικό

Α2. α) Ψευδής

β) Σελίδα 134 σχολικό

Α3. Σελίδα 144 σχολικό

Α4. Να χαρακτηρίσετε κάθε μία από τις παρακάτω συναρτήσεις ως ΣΩΣΤΗ ή ΛΑΘΟΣ :

Ι.Σ ΙΙ.Σ ΙΙΙ.Λ ΙV.Λ V.Λ

ΘΕΜΑ Β

Β1. $A=[-4,1)\cup(1,6]$, $f(A)=[1,8]$

Β2.i) $\lim\limits_{x\to-4} f(x)=1$

ii) $\lim\limits_{x\to-2} f(x)$ δεν υπάρχει διότι $\lim\limits_{x\to-2^-} f(x)=3$, $\lim\limits_{x\to-2^+} f(x)=4$

iii) $\lim\limits_{x\to1} f(x)=7$

iv) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)-8}{x}\overset{f(0)=8}{=}\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=f'(0)$ (f παραγωγίσιμη στο 0)

Παρατηρούμε ότι η C_f δέχεται οριζόντια εφαπτομένη στο $x_o=0$ άρα $f'(0)=0$.

Τελικά $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-8}{x}=0$

B3. i) $\lim_{x\to 0}\frac{x-1}{2f(x)-16}=\lim_{x\to 0}\frac{x-1}{2(f(x)-8)}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{x-1}{2}\cdot\frac{1}{f(x)-8}\right)=-\frac{1}{2}(-\infty)=+\infty$

Αφού $\lim_{x\to 0}(f(x)-8)=8-8=0$ και $f(x)<8$ κοντά στο 0.

ii)Η εφαπτομένη της C_f στο $x_o=3$ γίνεται:

(ε): $x+6y-12=0\Leftrightarrow y=-\frac{1}{6}x+2$

Επιπλέον η C_f βρίσκεται πάνω από την (ε) σε μια περιοχή κοντά στο 3, δηλαδή :

$f(x)>-\frac{1}{6}x+2\Leftrightarrow 6f(x)+x-12>0$ κοντά στο 3.

Άρα $\lim_{x\to 3}\frac{1}{6f(x)+x-12}=\lim_{y\to 0^+}\frac{1}{y}=+\infty$ (θέτουμε $y=6f(x)+x-12$)

B4. Για $x\in(-4,0)$ ισχύει ότι $f(x)>1$ και $f(x)<8$.

Η εξίσωση γίνεται για $x\neq\{1,3\}$: $\frac{f(\alpha)-8}{x-1}-\frac{f(\beta)-1}{x-3}=0\Leftrightarrow(x-3)(f(\alpha)-8)-(x-1)(f(\beta)-1)=0$

Έστω $g(x)=(x-3)(f(\alpha)-8)-(x-1)(f(\beta)-1),\ x\in[1,3]$

g συνεχής στο [1,3] και επιπλέον

$g(1)=-2(f(\alpha)-8)>0$,$(f(x)<8)$ και

$g(3)=-2(f(\beta)-1)<0,\ (f(x)>1)$

Άρα $g(1)\cdot g(3)<0$. Επομένως από θεώρημα Bolzano υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi\in(1,3)$ τέτοιο ώστε $g(\xi)=0\Leftrightarrow\frac{f(\alpha)-8}{\xi-1}-\frac{f(\beta)-1}{\xi-3}=0$

B5. Η f δεν είναι συνεχής στο $x_1=-2$ καθώς το $\lim_{x\to -2}f(x)$ δεν υπάρχει (B2)

και στο $x_2=2$ καθώς το $\lim_{x\to 2}f(x)$ δεν υπάρχει διότι $\lim_{x\to 2^-}f(x)=4,\ \lim_{x\to 2^+}f(x)=2$

Προσοχή!! Δεν έχει νόημα να μελετηθεί η συνέχεια στο x = 1 καθώς δεν ανήκει στο πεδίο ορισμού της f.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Αφού f παραγωγίσιμη στο $x_o = 1$ θα είναι και συνεχής, επομένως

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^+} f(x) = f(1)$$

- $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-}[-\alpha συν(x-1) + (\alpha+2)x + \beta] = -\alpha + \alpha + 2 + \beta = 2 + \beta$
- $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-}[(2\beta+1)e^{x-1} + \alpha x^2 + \beta x] = 2\beta + 1 + \alpha + \beta = 3\beta + \alpha + 1$

Έχουμε λοιπόν $2 + \beta = 3\beta + \alpha + 1 \Leftrightarrow \alpha = 1 - 2\beta \ \ (1)$

Επιπλέον

- $$\lim_{x\to 1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^-}\frac{-\alpha συν(x-1)+(\alpha+2)x+\beta-3\beta-\alpha-1}{x-1} =$$
$$\lim_{x\to 1^-}\frac{(2\beta-1)συν(x-1)+(3-2\beta)x+\beta-3\beta-1+2\beta-1}{x-1} =$$
$$\lim_{x\to 1^-}\frac{(2\beta-1)συν(x-1)+3x-2\beta x-2}{x-1} = \lim_{x\to 1^-}\frac{(2\beta-1)συν(x-1)+x-2\beta x+2x-2}{x-1} =$$
$$= \lim_{x\to 1^-}\frac{(2\beta-1)συν(x-1)-x(2\beta-1)+2x-2}{x-1} = \lim_{x\to 1^-}\frac{(2\beta-1)[συν(x-1)-x]}{x-1} + \lim_{x\to 1^-}\frac{2x-2}{x-1}$$

➢ $$\lim_{x\to 1^-}\frac{(2\beta-1)[συν(x-1)-x]}{x-1} \overset{y=x-1}{=} \lim_{y\to 0^-}\left[(2\beta-1)\frac{συν y - y - 1}{y}\right] =$$
$$= \lim_{y\to 0^-}\left[(2\beta-1)\left(\frac{συν y-1}{y} - \frac{y}{y}\right)\right] = -2\beta+1$$

➢ $$\lim_{x\to 1^-}\frac{2x-2}{x-1} = \lim_{x\to 1^-}\frac{2(x-1)}{x-1} = 2$$

Άρα $\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1} = -2\beta+3$

- $$\lim_{x\to 1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^+}\frac{(2\beta+1)e^{x-1}+\alpha x^2+\beta x-3\beta-\alpha-1}{x-1} \underset{DLH}{\overset{\frac{0}{0}}{=}} \lim_{x\to 1^+}((2\beta+1)e^{x-1}+2\alpha x+\beta) =$$
$$= 2\beta+1+2\alpha+\beta = 3\beta+1+2\alpha \overset{(1)}{=} 3\beta+1+2-4\beta = 3-\beta$$

Επομένως $3 - 2\beta = 3 - \beta \Leftrightarrow \beta = 0,\ \alpha = 1$

Η f γίνεται $f(x) = \begin{cases} e^{x-1} + x^2, & x \ge 1 \\ -συν(x-1) + 3x, & 0 \le x < 1 \end{cases}$

Γ2. Έχουμε $f'(x) = \begin{cases} e^{x-1} + 2x, & x \ge 1 \\ ημ(x-1) + 3, & 0 \le x < 1 \end{cases}$

$f'(1) = 3,\ f(1) = 2$ άρα η εφαπτομένη της C_f στο $x_o = 1$ είναι:

(ε) $y-2=3(x-1)\Leftrightarrow y=3x-1$

Η ε τέμνει:

- Τον x'x για y = 0 στο σημείο $A\left(\frac{1}{3},0\right)$
- Τον y'y για x = 0 στο σημείο $B(0,-1)$

Άρα $(AOB)=\frac{1}{2}OA\cdot OB=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot 1=\frac{1}{6}$ τ.μ.

Επιπλέον για $0\le x<1$, $f''(x)=\sigma\upsilon\nu(x-1)>0$ άρα f' γνησίως αύξουσα στο $[0,1)$ και

$E=\frac{1}{6}=\frac{3}{18}<\frac{\pi}{18}$. Άρα $\frac{1}{6}<\frac{\pi}{18}\overset{f'\uparrow}{\Leftrightarrow} f'\left(\frac{1}{6}\right)<f'\left(\frac{\pi}{18}\right)$.

Γ3 .Έχουμε $\lim\limits_{x\to 1}\frac{e^{x-1}}{2f(x)-6x+2}=\lim\limits_{x\to 1}\left[\frac{e^{x-1}}{2}\cdot\frac{1}{f(x)-3x+1}\right]=\lambda$

Για $x>1$ $f''(x)=e^{x-1}+2>0$ άρα f κυρτή στο $[1,+\infty)$

Για $x\in[0,1)$ $f''(x)=\sigma\upsilon\nu(x-1)>0$, άρα f κυρτή στο $[0,1]$

Επιπλέον ορίζεται εφαπτομένη της C_f στο x = 1 άρα f κυρτή στο $[0,+\infty)$.

Η εφαπτομένη της C_f στο x = 1 είναι η $y=3x-1$,

άρα $f(x)\ge 3x-1\Leftrightarrow f(x)-3x+1\ge 0$ με την ισότητα να ισχύει για x = 1.

Επομένως $\lim\limits_{x\to 1}\frac{1}{f(x)-3x+1}=+\infty$

Τελικά $\lambda=\lim\limits_{x\to 1}\left[\frac{e^{x-1}}{2}\cdot\frac{1}{f(x)-3x+1}\right]=\frac{1}{2}\cdot(+\infty)=+\infty$

Γ4. Για $x>1$ έχουμε ότι $x^2>x\Leftrightarrow x^2-x>0$ και f' γνησίως αύξουσα στο $(1,+\infty)$

Επιπλέον η δοσμένη σχέση γίνεται διαδοχικά :

$f(x^2)-f(x)>(x^2-x)f'(x)\Leftrightarrow\frac{f(x^2)-f(x)}{x^2-x}>f'(x)$.Αρκεί λοιπόν να δείξουμε ότι $\frac{f(x^2)-f(x)}{x^2-x}>f'(x)$

Η f ικανοποιεί τις προυποθέσεις του ΘΜΤ στο $[x,x^2]$.Υπάρχει λοιπόν $\xi\in(x,x^2)$ τέτοιο ώστε

$f'(\xi)=\frac{f'(x^2)-f(x)}{x^2-x}$.

Όμως $\xi\in(x,x^2)$ άρα $\xi>x\overset{f'\uparrow}{\Leftrightarrow}f'(\xi)>f'(x)\Leftrightarrow\frac{f(x^2)-f(x)}{x^2-x}>f'(x)$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1.

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+2h)-2f(x)+f(x-2h)}{h^2}\overset{(\frac{0}{0})}{\underset{DLH}{=}}\lim_{h\to 0}\frac{(f(x+2h)-2f(x)+f(x-2h))'}{(h^2)'}=$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{2f'(x+2h)-2f'(x-2h)}{2h}=\lim_{h\to 0}\frac{f'(x+2h)-f'(x-2h)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f'(x+2h)-f'(x)+f'(x)-f'(x-2h)}{h}=$$

$$\lim_{h\to 0}\left[\frac{f'(x+2h)-f'(x)}{h}+\frac{f'(x)-f'(x-2h)}{h}\right]=2f''(x)+2f''(x)=4f''(x)$$

Διότι

$$\lim_{h\to 0}\left[\frac{f'(x+2h)-f'(x)}{h}\right]=\lim_{u\to x}\left[\frac{f'(u)-f'(x)}{\frac{u-x}{2}}\right]=\lim_{u\to x}2\left[\frac{f'(u)-f'(x)}{u-x}\right]=2f''(x)$$

$$u=x+2h\Leftrightarrow h=\frac{u-x}{2}$$

$$\lim_{h\to 0}(x+2h)=x$$

$$\bullet\lim_{h\to 0}\left[\frac{f'(x)-f'(x-2h)}{h}\right]=\lim_{u\to x}\left[\frac{f'(x)-f'(u)}{\frac{x-u}{2}}\right]=\lim_{u\to x}2\left[\frac{f'(u)-f'(x)}{u-x}\right]=2f''(x)$$

$$u=x-2h\Leftrightarrow h=\frac{x-u}{2}$$

$$\lim_{h\to 0}(x-2h)=x$$

Επομένως έχουμε

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+2h)-2f(x)+f(x-2h)}{h^2}=4e^x-8\Rightarrow 4f''(x)=4e^x-8\Rightarrow f''(x)=e^x-2$$

$(f'(x))'=(e^x-2x)'$,άρα από συνέπειες ΘΜΤ προκύπτει $f'(x)=e^x-2x+c_1$

και για $x=0$ έχω $f'(0)=e^0+c_1\Rightarrow c_1=1$,άρα $f'(x)=e^x-2x+1$

$(f(x))'=(e^x-x^2+x)'$ άρα από συνέπειες ΘΜΤ προκύπτει $f(x)=e^x-x^2+x+c_2$

Για $x=0$ έχω $f(0)=e^0+c_2\Rightarrow c_2=0$,άρα τελικά $f(x)=e^x-x^2+x$

Δ2.

Η f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x)=e^x-2x+1$

Η f' παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f''(x)=e^x-2$

$f''(x)=0 \Leftrightarrow e^x-2=0 \Leftrightarrow x=\ln 2$

$f''(x)>0 \Leftrightarrow e^x-2>0 \Leftrightarrow x>\ln 2$
$f''(x)<0 \Leftrightarrow e^x-2<0 \Leftrightarrow x<\ln 2$

Άρα , έχουμε :

x	$-\infty$	$\ln 2$	$+\infty$
$f''(x)$	$-$		$+$
$f'(x)$	$\searrow$		$\nearrow$
		O.E	

Αφού η f' παρουσιάζει ελάχιστο στο $x=\ln 2$,τότε $f'(x)\geq f'(\ln 2) \Leftrightarrow f'(x)\geq 2-2\ln 2+1 \Leftrightarrow f'(x)\geq 3-2\ln 2>0$,άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

Δ3. Έστω $M(x_o, f(x_o))$ το σημείο επαφής της εφαπτομένης και της C_f .Τότε έχουμε $(\varepsilon): y-f(x_o)=f'(x_o)(x-x_o)$

Επειδή $A\in(\varepsilon): 0-f(x_o)=f'(x_o)(1-x_o) \Leftrightarrow f'(x_o)(1-x_o)+f(x_o)=0$

Αρκεί να αποδείξουμε ότι η εξίσωση $f'(x)(1-x)+f(x)=0$ έχει μοναδική ρίζα στο $(1,3)$.

Θεωρώ $g(x)=f'(x)(1-x)+f(x)$

$\Gamma\iota\alpha\ x\in(1,3)\ \acute{\varepsilon}\chi\omega\ g'(x)=f''(x)(1-x)-f'(x)+f'(x)=f''(x)(1-x)<0$
$\alpha\varphi o\acute{\upsilon}\ f''(x)>0\ \sigma\tau o\ (\ln 2,+\infty)\ \kappa\alpha\iota\ 1-x<0$

Άρα η g γνησίως φθίνουσα στο $(1,3)$,άρα η $g(x)=0$ έχει μία το πολύ ρίζα στο $(1,3)$.

Η g συνεχής στο $[1,3]$ ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων

$g(1)=f(1)=e>0$
$g(3)=-2f'(3)+f(3)=-2e^3+10+e^3-6=4-e^3<0$

Άρα $g(1)g(3)<0$,επομένως από Θεώρημα Bolzano η $g(x)=0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $(1,3)$.Επομένως η $g(x)=0$ έχει μοναδική ρίζα στο $(1,3)$.

Δ4. $h(x)=\left(f(x)+x^2-x-1\right)^2(x-2)^2=\left(e^x-1\right)^2(x-2)^2$

Η h παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με

$h'(x)=2\left(e^x-1\right)e^x(x-2)^2+2(x-2)\left(e^x-1\right)^2=$
$2\left(e^x-1\right)(x-2)\left[e^x(x-2)+e^x-1\right]=2\left(e^x-1\right)(x-2)\left(xe^x-e^x-1\right)$

$h'(x)=0 \Leftrightarrow x=0\ \acute{\eta}\ x=2\ \acute{\eta}\ xe^x-e^x-1=0$.

Θεωρώ $\varphi(x)=xe^x-e^x-1, x\in[0,2]$

Η φ συνεχής στο $[0,2]$

$\varphi(0)=-2<0 \ \ \kappa\alpha\iota \ \ \varphi(2)=e^2-1>0, \acute{\alpha}\rho\alpha \ \varphi(0)\varphi(2)<0$

Επομένως από Θεώρημα Bolzano η $\varphi(x)=0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $(0,2)$.

Για $x\in(0,2)$ $\acute{\varepsilon}\chi\omega$ $\varphi'(x)=e^x+xe^x-e^x=xe^x>0$, άρα η φ γνησίως αύξουσα στο $(0,2)$

Επομένως υπάρχει μοναδικό $x_o\in(0,2)$ $\acute{\omega}\sigma\tau\varepsilon$ $\varphi(x_o)=0$. Επίσης η ρίζα x_0 είναι η μοναδική στο διάστημα $[0,+\infty)$, αφού η φ είναι γνησίως αύξουσα σε αυτό.

Ακόμη είναι $\varphi'(x)<0$ για $x<0$, άρα $\varphi\downarrow\Delta=(-\infty,0)$,άρα $\varphi(\Delta)=\left(\lim\limits_{x\to 0^-}\varphi(x),\lim\limits_{x\to-\infty}\varphi(x)\right)=(-2,-1)$, δηλαδή $\varphi(x)<0$ για κάθε $x\in(-\infty,0)$.

x	$-\infty$ 0	xo	2	$+\infty$
e^x-1	$-$	$+$	$+$	$+$
$x-2$	$-$	$-$	$-$	$+$
$\varphi(x)$	$-$	$-$	$+$	$+$
h'	$-$	$+$	$-$	$+$
h	$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$

T.E T.M T.E

$x>x_o \overset{\varphi\nearrow}{\Leftrightarrow} \varphi(x)>\varphi(x_o)\Leftrightarrow\varphi(x)>0$

$0<x<x_o \overset{\varphi\nearrow}{\Leftrightarrow} \varphi(x)<\varphi(x_o)\Leftrightarrow\varphi(x)<0$

Επομένως η h παρουσιάζει 2 τοπικά ελάχιστα στα x=2, x=0 και ένα τοπικό μέγιστο στο x=xo