ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ Γ ΛΥΚΕΙΟΥ

Άσκηση 1

Δίνονται οι συναρτήσεις $f\left(x\right)=\ln x-1, x>0$, $g\left(x\right)=\dfrac{e^x}{e^x+1}, x\in\mathbb{R}$.

α) Να βρεθεί η συνάρτηση $\varphi\left(x\right)=\left(fog\right)\left(x\right)$

β) Να αποδείξετε ότι ορίζεται η φ^{-1} και να βρείτε το πεδίο ορισμού της.

γ) Να βρείτε τα κοινά σημεία των $C_{\varphi}, C_{\varphi^{-1}}$.

δ) Αν θεωρήσουμε γνωστό ότι η φ^{-1} είναι συνεχής, να βρεθεί το όριο

$\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\eta\mu x}{\varphi^{-1}\left(x\right)}$.

ΛΥΣΗ

α) $f\left(x\right)=\ln x-1 \quad D_f=\left(0,+\infty\right)$

$g\left(x\right)=\dfrac{e^x}{e^x+1} \quad D_g=\mathbb{R}$

$D_{fog}=\left\{x\in D_g \,/\, g\left(x\right)\in D_f\right\}=\left\{x\in\mathbb{R} \,/\, g\left(x\right)\in\left(0,+\infty\right)\right\}=$

$=\left\{x\in\mathbb{R} \,/\, x\in\mathbb{R}\right\}=\mathbb{R}$

διότι $\dfrac{e^x}{e^x+1}>0$,ισχύει για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

$\varphi\left(x\right)=\left(fog\right)\left(x\right)=f\left(g\left(x\right)\right)=\ln\dfrac{e^x}{e^x+1}-1=$

$\ln e^x-\ln\left(e^x+1\right)-1=x-\ln\left(e^x+1\right)-1$

β) Η φ παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με

$$\varphi'(x)=\left(x-\ln\left(e^x+1\right)-1\right)'=1-\frac{\left(e^x+1\right)'}{e^x+1}=1-\frac{e^x}{e^x+1}=\frac{e^x+1-e^x}{e^x+1}=\frac{1}{e^x+1}>0$$

επομένως η φ είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$,άρα 1 – 1 , άρα ορίζεται η φ^{-1} .

Η φ συνεχής στο $\mathbb{R}$ και γνησίως αύξουσα οπότε έχουμε

$$D_{\varphi^{-1}}=\varphi(\mathrm{A})\overset{\varphi\nearrow}{=}\left(\lim_{x\to-\infty}\varphi(x),\lim_{x\to+\infty}\varphi(x)\right)=(-\infty,-1)$$

$$\lim_{x\to-\infty}\varphi(x)=\lim_{x\to-\infty}\left(\ln\frac{e^x}{e^x+1}-1\right)=\lim_{u\to0}(\ln u-1)=-\infty$$

$$u=\frac{e^x}{e^x+1},\quad \lim_{x\to-\infty}\frac{e^x}{e^x+1}=0$$

$$\lim_{x\to+\infty}\varphi(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(\ln\frac{e^x}{e^x+1}-1\right)=\lim_{u\to1}(\ln u-1)=-1$$

$$u=\frac{e^x}{e^x+1},\quad \lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{e^x+1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{e^x\left(1+\frac{1}{e^x}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{e^x}}=1$$

γ) Τα κοινά σημεία των $C_\varphi,C_{\varphi^{-1}}$ έχουν τετμημένες τη λύση του συστήματος

$$\begin{cases}y=\varphi(x)\\ y=\varphi^{-1}(x)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=\varphi(x)\\ x=\varphi(y)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=\varphi(x)\\ y-x=\varphi(x)-\varphi(y)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=\varphi(x)\\ y+\varphi(y)=x+\varphi(x)\ (1)\end{cases}$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x)=\varphi(x)+x, x\in\mathbb{R}$,

οπότε η (1) γίνεται $h(x)=h(y)$ (2)

Η h παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $h'(x)=\varphi'(x)+1>0$,άρα η φ γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$,άρα και ''1-1'',επομένως από τη (2) έχω:

$$h(x)=h(y)\overset{1-1}{\Leftrightarrow} x=y \Leftrightarrow \varphi(x)=x \Leftrightarrow x-\ln(e^x+1)-1=x$$

$$\Leftrightarrow -\ln(e^x+1)-1=0 \Leftrightarrow \ln(e^x+1)=-1 \Leftrightarrow e^x+1=e^{-1} \Leftrightarrow e^x=\frac{1-e}{e}$$

$$\Leftrightarrow x=\ln\frac{1-e}{e} \Leftrightarrow x=\ln(1-e)-1$$

άρα το κοινό σημείο των $C_\varphi, C_{\varphi^{-1}}$ είναι το $\left(\ln(1-e)-1, \ln(1-e)-1\right)$.

δ) Βρίσκουμε τη μονοτονία της φ^{-1} .

Για κάθε $x_1, x_2 \in (-\infty,-1)$ με $x_1 < x_2$ έχω

$x_1 < x_2 \Leftrightarrow \varphi\left(\varphi^{-1}(x_1)\right) < \varphi\left(\varphi^{-1}(x_2)\right) \overset{\varphi\nearrow}{\Leftrightarrow} \varphi^{-1}(x_1) < \varphi^{-1}(x_2)$, άρα η φ^{-1} είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty,-1)$.

Ξέρουμε ότι $\varphi^{-1}(\mathrm{A})=D_\varphi=\mathbb{R}$ και αφού η φ^{-1} είναι γνησίως αύξουσα τότε

$$\lim_{x\to-\infty}\varphi^{-1}(x)=-\infty \ \kappa\alpha\iota\ \lim_{x\to-1^-}\varphi^{-1}(x)=+\infty$$

$$\left|\frac{\eta\mu x}{\varphi^{-1}(x)}\right|=\frac{|\eta\mu x|}{\left|\varphi^{-1}(x)\right|}\le\frac{1}{\left|\varphi^{-1}(x)\right|}$$

άρα $-\dfrac{1}{\left|\varphi^{-1}(x)\right|}\le\dfrac{\eta\mu x}{\varphi^{-1}(x)}\le\dfrac{1}{\left|\varphi^{-1}(x)\right|}$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(-\frac{1}{\left|\varphi^{-1}(x)\right|}\right)\overset{\varphi^{-1}(x)<0}{=}\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{\varphi^{-1}(x)}\right)=0$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{\left|\varphi^{-1}(x)\right|}\right)\overset{\varphi^{-1}(x)<0}{=}\lim_{x\to-\infty}\left(-\frac{1}{\varphi^{-1}(x)}\right)=0$$

Άρα από Κριτήριο Παρεμβολής έχω $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\eta\mu x}{\varphi^{-1}(x)}=0$

Άσκηση 2

Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f'(x)+f(x)=e^{-x}$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.Αν η εφαπτομένη της C_f στο $x_o=0$ είναι παράλληλη στην ευθεία $y=3x+2020$,τότε:

α) Να βρεθεί η συνάρτηση f

β) Να μελετήσετε τις f,f' ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

γ) Να λυθεί στο $\mathbb{R}$ η ανίσωση $f\left(x^4+6\right)-f\left(x^4+5\right)<f\left(4x^2+6\right)-f\left(4x^2+5\right)$

δ) Αν $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$, να βρεθεί το πλήθος ριζών της εξίσωσης $x=2+\lambda e^x$ για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}$.

ε) Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $x_o\in(0,2)$ ώστε η εφαπτομένη της C_f στο x_o να διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

ΛΥΣΗ

α) Αφού η εφαπτομένη της C_f στο $x_o=0$ είναι παράλληλη στην ευθεία $y=3x+2020$ τότε $f'(0)=3$.

Από την αρχική σχέση για $x=0$: $f'(0)+f(0)=e^0\Leftrightarrow 3+f(0)=1\Leftrightarrow f(0)=-2$

Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ έχω $f'(x)+f(x)=e^{-x}\Leftrightarrow e^xf'(x)+e^xf(x)=1\Leftrightarrow\left(e^xf(x)\right)'=(x)'$

Επομένως από συνέπειες Θεωρήματος Μέσης Τιμής υπάρχει $c\in\mathbb{R}$ έτσι ώστε

$e^xf(x)=x+c$.Για $x=0$ έχουμε $e^0f(0)=c\Leftrightarrow c=-2$.Άρα τελικά έχουμε

$e^xf(x)=x-2\Leftrightarrow f(x)=\dfrac{x-2}{e^x}$.

β) Η f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $\Leftrightarrow f'(x)=\left(\dfrac{x-2}{e^x}\right)'=\dfrac{e^x-(x-2)e^x}{e^{2x}}=\dfrac{3-x}{e^x}$

$$f'(x)>0 \Leftrightarrow \frac{3-x}{e^x}>0 \overset{e^x>0}{\Leftrightarrow} 3-x>0 \Leftrightarrow x<3$$

$$f'(x)<0 \Leftrightarrow \frac{3-x}{e^x}<0 \overset{e^x>0}{\Leftrightarrow} 3-x<0 \Leftrightarrow x>3$$

x	$-\infty$ 3	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	$-$
$f(x)$	$\nearrow$	$\searrow$

Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $\left[3,+\infty\right)$.

Η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $\left(-\infty,3\right]$ . .

Η f παρουσιάζει ολικό μέγιστο στο $x_o=3$ το $f(3)=\frac{1}{e^3}$

Η f' παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $\Leftrightarrow f''(x)=\left(\frac{3-x}{e^x}\right)'=\frac{-e^x-(3-x)e^x}{e^{2x}}=\frac{x-4}{e^x}$

$$f''(x)>0 \Leftrightarrow \frac{x-4}{e^x}>0 \overset{e^x>0}{\Leftrightarrow} x>4$$

$$f''(x)<0 \Leftrightarrow \frac{x-4}{e^x}<0 \overset{e^x>0}{\Leftrightarrow} x<4$$

x	$-\infty$ 4	$+\infty$
$f''(x)$	$-$	$+$
$f'(x)$	$\searrow$	$\nearrow$

Η f' είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $\left[4,+\infty\right)$.

Η f' είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $\left(-\infty,4\right]$ . .

Η f' παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο $x_o=4$ το $f'(4)=-\frac{1}{e^4}$

γ) Έστω $h(x)=f(x+1)-f(x)$.Τότε η ανίσωση γίνεται $h\left(x^4+5\right)<h\left(4x^2+5\right)$

Η h παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $h'(x)=f'(x+1)-f'(x)>0$

αφού $x^4+6>4$,$x^4+5>4$, $4x^2+6>4$, $4x^2+5>4$ όπου η f' είναι γνησίως αύξουσα

τότε για $x+1>x\overset{f'\nearrow}{\Leftrightarrow}f'(x+1)>f'(x)$.Οπότε έχουμε:

$$h\left(x^4+5\right)<h\left(4x^2+5\right)\overset{h\nearrow}{\Leftrightarrow}x^4+5<4x^2+5$$
$$\Leftrightarrow x^4<4x^2\Leftrightarrow x^4-4x^2<0\Leftrightarrow x^2\left(x^2-4\right)<0$$
$$\Leftrightarrow x\in(-2,0)\cup(0,2)$$

δ) Η εξίσωση γράφεται η ισοδύναμα

$$x=2+\lambda e^x\Leftrightarrow x-2=\lambda e^x\Leftrightarrow\frac{x-2}{e^x}=\lambda\Leftrightarrow f(x)=\lambda \text{ (1)}$$

Έστω $\Delta_1=(-\infty,3)$, $\Delta_2=[3,+\infty)$.

• Η f συνεχής και γνησίως αύξουσα στο Δ_1 ,άρα

$f(\Delta_1)=\left(\lim\limits_{x\to-\infty}f(x),\lim\limits_{x\to3^-}f(x)\right)=\left(-\infty,\frac{1}{e^3}\right)$ αφού

• $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{x-2}{e^x}\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}(x-2)\frac{1}{e^x}=-\infty$

• $\lim\limits_{x\to3^-}f(x)=\lim\limits_{x\to3^-}\left(\frac{x-2}{e^x}\right)=\frac{1}{e^3}$

• Η f συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο Δ_2 ,άρα

$f(\Delta_2)=\left(\lim\limits_{x\to+\infty}f(x),f(3)\right]=\left(0,\frac{1}{e^3}\right]$, αφού

• $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$

• $f(3)=\frac{1}{e^3}$

• Αν $\lambda\le0$ τότε $\lambda\in f(\Delta_1)$ και αφού η f είναι γνησίως αύξουσα στο Δ_1 ,τότε η (1) έχει μία ακριβώς ρίζα στο Δ_1

• Αν $0<\lambda<\frac{1}{e^3}$ τότε $\lambda\in f(\Delta_1), \lambda\in f(\Delta_2)$ και αφού η f είναι γνησίως αύξουσα στο Δ_1 και η f γνησίως φθίνουσα στο Δ_2 ,τότε η (1) έχει δύο ακριβώς ρίζες στο $\mathbb{R}$.

• Αν $\lambda>\frac{1}{e^3}$ τότε η εξίσωση δεν έχει ρίζες στο $\mathbb{R}$

• Αν $\lambda=\frac{1}{e^3}$ τότε $\lambda\in f(\Delta_2)$ και αφού η f είναι γνησίως φθίνουσα στο Δ_2 ,τότε η (1) έχει μία ακριβώς ρίζα στο Δ_2

ε) Η εφαπτομένη της C_f στο x_o έχει εξίσωση $y-f(x_o)=f'(x_o)(x-x_o)$.Αφού διέρχεται από την αρχή των αξόνων τότε

$-f(x_o)=f'(x_o)(-x_o)\Leftrightarrow f'(x_o)x_o-f(x_o)=0$.Αρκεί να αποδείξουμε ότι η εξίσωση $f'(x)x-f(x)=0$ έχει μοναδική ρίζα στο $(0,2)$.

Θεωρούμε συνάρτηση $\varphi(x)=f'(x)x-f(x)$, $x\in[0,2]$

Η φ παραγωγίσιμη στο $(0,2)$ με $\varphi'(x)=f''(x)x+f'(x)-f'(x)=f''(x)x<0$,άρα η φ γνησίως φθίνουσα στο $(0,2)$,άρα η $\varphi(x)=0$ έχει μια το πολύ ρίζα στο $(0,2)$.

Η φ συνεχής στο $[0,2]$ ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων

$\varphi(0)=-f(0)=-2<0$

$\varphi(2)=2f'(2)-f(2)=\frac{2}{e^2}>0$

άρα από Θεώρημα BOLZANO η εξίσωση φ(x)=0 έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $(0,2)$.Επομένως η εξίσωση φ(x)=0 έχει μία μοναδική ρίζα στο $(0,2)$.