ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ Γ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΘΕΜΑ 1

Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ μία συνάρτηση με $f(0)=2$ η οποία είναι συνεχής και ισχύει:

$$f^2(x)+1=e^{4x}+2f(x) \quad ,\text{για κάθε } x\in\mathbb{R}$$

α) Να βρείτε τον τύπο της f.

Αν $f(x)=e^{2x}+1$, $x\in\mathbb{R}$

β) Να εξετάσετε αν υπάρχει $x_0\in(-\infty,0]$, τέτοιο ώστε $\ln\left(\dfrac{e^{2x_o}}{\sqrt{9-x_o}-1}\right)=0$.

γ) Έστω επιπλέον δυο αριθμοί $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ με $\alpha<\beta$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $x_o\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε να ισχύει $\dfrac{f(\alpha)}{3}+\dfrac{f(\beta)}{2}=\dfrac{5}{6}f(x_o)$

δ) Αφού βρείτε το πρόσημο των παραστάσεων x^3-x και x^5-x, να λύσετε την εξίσωση:

$$f(x^3)\cdot f(x^5)=f^2(x)$$

Απαντήσεις

α) Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει:

$f^2(x)+1=e^{4x}+2f(x)\Leftrightarrow f^2(x)-2f(x)+1=e^{4x}\Leftrightarrow (f(x)-1)^2=e^{4x}\Leftrightarrow \sqrt{(f(x)-1)^2}=\sqrt{e^{4x}}\Leftrightarrow$
$|f(x)-1|=e^{2x}$

Έστω $g(x)=f(x)-1$, $x\in\mathbb{R}$ άρα έχουμε:

$|g(x)|=e^{2x}, x\in\mathbb{R}$ (1)

Όμως $e^{2x}>0$,άρα $e^{2x}\neq 0 \overset{(1)}{\Leftrightarrow} |g(x)|\neq 0\Leftrightarrow g(x)\neq 0$

Αφού $g(x)\neq 0$ και g συνεχής ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων, θα διατηρεί πρόσημο για κάθε $x\in\mathbb{R}$.Επιπλέον $g(0)=f(0)-1=2-1=1>0$,άρα $g(x)>0$, $x\in\mathbb{R}$

$(1) \overset{g(x)>0}{\Rightarrow} g(x)=e^{2x}\Leftrightarrow f(x)-1=e^{2x}\Leftrightarrow f(x)=e^{2x}+1, x\in\mathbb{R}$

β) Η εξίσωση θα γίνει διαδοχικά:

$\ln\left(\dfrac{e^{2x_o}}{\sqrt{9-x_o}-1}\right)=0\Leftrightarrow \ln\left(\dfrac{e^{2x_o}}{\sqrt{9-x_o}-1}\right)=\ln 1\Leftrightarrow \dfrac{e^{2x_o}}{\sqrt{9-x_o}-1}=1\Leftrightarrow e^{2x_o}=\sqrt{9-x_o}-1\Leftrightarrow$
$e^{2x_o}+1=\sqrt{9-x_o}\Leftrightarrow f(x_o)=\sqrt{9-x_o}$

Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ έχουμε $f'(x)=2e^{2x}>0$, άρα f γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

Έστω $A_1=(-\infty,0]$ και αφού f συνεχής και γνησίως αύξουσα στο A_1:
$f(A_1)=(\lim\limits_{x\to-\infty} f(x),f(0)]$

- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}(e^{2x}+1)\overset{y=2x}{=}\lim\limits_{y\to-\infty}(e^{y}+1)=0+1=1$
- $f(0)=2$

Άρα $f(A_1)=(1,2]$

Επιπλέον για $x_o\in(-\infty,0]: x_o\le 0\Leftrightarrow -x_o\ge 0\Leftrightarrow 9-x_o\ge 9\Leftrightarrow \sqrt{9-x_o}\ge 3$.

Επομένως $\sqrt{9-x_o}\notin f(A_1)$, δηλαδή δεν υπάρχει $x_o\in(-\infty,0]$ τέτοιο ώστε $f(x_o)=\sqrt{9-x_o}$.

Γ)Είναι $\frac{f(\alpha)}{3}+\frac{f(\beta)}{2}=\frac{5}{6}f(x_o)\Leftrightarrow \frac{f(\alpha)}{3}+\frac{f(\beta)}{2}-\frac{5}{6}f(x_o)=0$

Έστω $g(x)=\frac{f(\alpha)}{3}+\frac{f(\beta)}{2}-\frac{5}{6}f(x),\ x\in[\alpha,\beta]$

- g συνεχής στο [α,β] και επιπλέον
- $g(\alpha)=\frac{f(\alpha)}{3}+\frac{f(\beta)}{2}-\frac{5}{6}f(\alpha)=\frac{f(\beta)}{2}-\frac{f(\alpha)}{2}=\frac{1}{2}(f(\beta)-f(\alpha))$
  $g(\beta)=\frac{f(\alpha)}{3}+\frac{f(\beta)}{2}-\frac{5}{6}f(\beta)=\frac{f(\alpha)}{3}-\frac{f(\beta)}{3}=\frac{1}{3}(f(\alpha)-f(\beta))$

Άρα $g(\alpha)\cdot g(\beta)=-\frac{1}{6}(f(\beta)\cdot f(\alpha))^2<0$,αφού $\alpha\neq\beta\overset{f\,1-1}{\Leftrightarrow}f(\alpha)\neq f(\beta)$

Επομένως από θεώρημα Bolzano υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_o\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε $g(x_o)=0\Leftrightarrow \frac{f(\alpha)}{3}+\frac{f(\beta)}{2}-\frac{5}{6}f(x_o)=0\Leftrightarrow \frac{f(\alpha)}{3}+\frac{f(\beta)}{2}=\frac{5}{6}f(x_o)$.

Επιπλέον για κάθε $x\in(\alpha,\beta)$ έχουμε $g'(x)=-\frac{5}{6}f'(x)<0$ άρα g γνησίως φθίνουσα στο [α,β], δηλαδή η g έχει το πολύ μία ρίζα . Επομένως x_o μοναδικό.

δ) Έχουμε:

$x^3-x=x(x^2-1)=x(x-1)(x+1)$και
$x^5-x=x(x^4-1)=x(x^2-1)(x^2+1)=x(x-1)(x+1)(x^2+1)$

αφού $x^2+1>0, x\in\mathbb{R}$ οι παραπάνω παραστάσεις θα έχουν το ίδιο πρόσημο, το οποίο φαίνεται στο παρακάτω πινακάκι:

x	$-\infty$ -1 0 1 $+\infty$			
x	-	-	+	+
x-1	-	-	-	+
x+1	-	+	+	+
x(x-1)(x+1)	-	+	-	+

Για την εξίσωση $f(x^3)\cdot f(x^5)=f^2(x)$, (1) έχουμε:

Οι αριθμοί -1,0,1είναι λύσεις της (1) αφού:

Για $x=0$ στην (1): $f(0)\cdot f(0)=f^2(0)$ που ισχύει

Για $x=-1$ στην (1): $f(-1)\cdot f(-1)=f^2(-1)$ που ισχύει

Για $x=1$ στην (1): $f(1)\cdot f(1)=f^2(1)$ που ισχύει

Με τη βοήθεια του πίνακα προσήμου παραπάνω προκύπτουν οι εξής περιπτώσεις:

- Για $x\in(-\infty,-1)\cup(0,1)$

  $$\begin{cases} x^3-x<0 \\ x^5-x<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3<x \\ x^5<x \end{cases} \overset{f\uparrow}{\Leftrightarrow} \begin{cases} f(x^3)<f(x),(2) \\ f(x^5)<f(x),(3) \end{cases}$$

  Πολλαπλασιάζουμε κατά μέλη τις (2)και (3): $(f(x)>0,\text{για κάθε } x\in\mathbb{R})$

  $f(x^3)\cdot f(x^5)<f^2(x)$,άρα η (1) δεν έχει άλλη λύση στο $(-\infty,-1)\cup(0,1)$

- Για $x\in(-1,0)\cup(1,+\infty)$

  $$\begin{cases} x^3-x>0 \\ x^5-x>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3>x \\ x^5>x \end{cases} \overset{f\uparrow}{\Leftrightarrow} \begin{cases} f(x^3)>f(x),(4) \\ f(x^5)>f(x),(5) \end{cases}$$

  Πολλαπλασιάζουμε κατά μέλη τις (4)και (5): $(f(x)>0,\text{για κάθε } x\in\mathbb{R})$

  $f(x^3)\cdot f(x^5)>f^2(x)$,άρα η (1) δεν έχει άλλη λύση στο $(-1,0)\cup(1,+\infty)$

Τελικά οι μοναδικές λύσεις είναι οι -1, 0, 1

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=-\eta\mu x-x,\ x\in[-\pi,\pi]$.

Α) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και να βρείτε τα ακρότατά της.

Β) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη κυρτότητα και να βρείτε το σημείο καμπής της.

Γ) Να χαράξετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f.

Δ)Να βρείτε την εφαπτομένη (ε) της C_f στο σημείο (0,f(0)) και να υπολογίσετε το όριο:

$$A=\lim_{x\to 0}\frac{-x-1-x^2}{x\eta\mu x-x^2}$$

Ε) Αν θεωρήσουμε δεδομένο ότι:

- Ω_1 το χωρίο μεταξύ C_f ,x'x και των ευθειών $x=-\pi$ και $x=\pi$

- Ω_2 το χωρίο μεταξύ C_f, της εφαπτομένης (ε) και των ευθειών $x=-\pi$ και $x=\pi$

να συγκρίνετε το εμβαδών των χωρίων Ω_1 και Ω_2.

Στ) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $I=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{f(x)}{x^2+1}dx$.

Απαντήσεις

Α) Για κάθε $x\in[-\pi,\pi]$ έχουμε:

$f'(x)=-\sigma\upsilon\nu x-1<0$ για κάθε $x\in(-\pi,\pi)$, άρα f γνησίως φθίνουσα στο $[-\pi,\pi]$

Η f παρουσιάζει:

- Στη θέση $x=-\pi$ μέγιστο το $f(-\pi)=\eta\mu(-\pi)-(-\pi)=\pi$
- Στη θέση $x=\pi$ ελάχιστο το $f(\pi)=\eta\mu(\pi)-(\pi)=-\pi$

Β) Για κάθε $x\in[-\pi,\pi]$ έχουμε:

$f''(x)=\eta\mu x$ και ισχύει:

- $f''(x)>0 \Leftrightarrow \eta\mu x>0$ για κάθε $x\in(0,\pi)$
- $f''(x)<0 \Leftrightarrow \eta\mu x<0$ για κάθε $x\in(-\pi,0)$

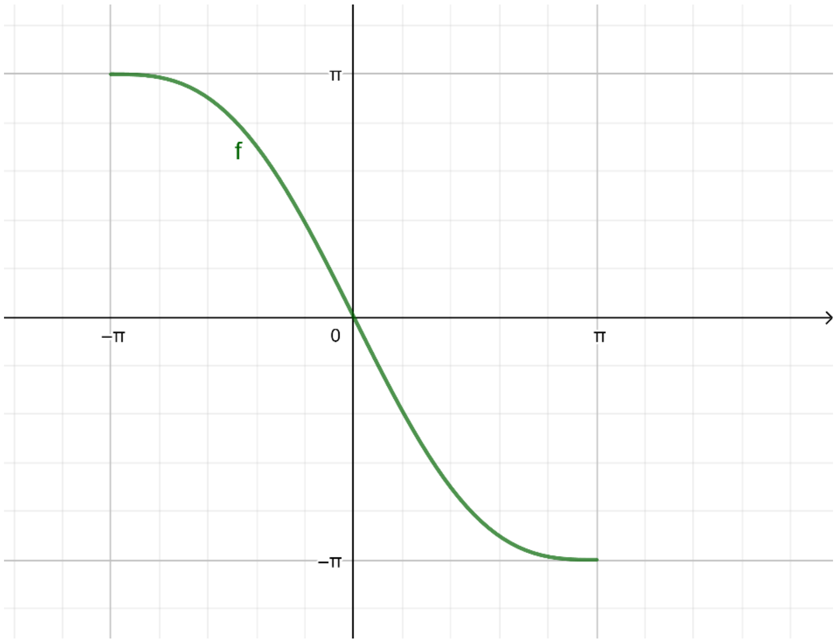
Άρα

- f κυρτή στο $[0,\pi]$ και
- f κοίλη στο $[-\pi,0]$

Η f παρουσιάζει καμπή στο σημείο $(0,f(0))$ ή $(0,0)$

Γ) Πίνακας μεταβολών:

x	-π		0		π
f '		−		−	
f ''		−		+	
f	π		0		-π



Δ)Η εφαπτομένη της C_f στο (0,f(0)) είναι της μορφής:

$(\varepsilon): y - f(0) = f'(0)(x-0) \Leftrightarrow y = -2x$

Επιπλέον για το όριο έχουμε:

$$A = \lim_{x\to 0}\frac{-x-1-x^2}{x\eta\mu x - x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{x+1+x^2}{x(-\eta\mu x + x)} = \lim_{x\to 0}\left[\left(x+1+x^2\right)\cdot\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{x-\eta\mu x}\right]$$

Για $x \in (-\pi, 0)$ είναι :

$$\lim_{x\to 0^-}\left(x+1+x^2\right) = 1 \ , \quad \lim_{x\to 0^-}\frac{1}{x} = -\infty \ \text{ και}$$

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{1}{-\eta\mu x + x} = \lim_{x\to 0^-}\frac{1}{-\eta\mu x - x - (-2x)} = \lim_{x\to 0^-}\frac{1}{f(x)-(-2x)}$$

Για $x \in (-\pi, 0)$,f κοίλη άρα $f(x) < -2x$ και επιπλέον $\lim\limits_{x\to 0^-}\left(f(x)-(-2x)\right) = 0$

Άρα $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{1}{f(x)-(-2x)} = -\infty$

Οπότε

$$\lim_{x\to 0^-}\left[\left(x+1+x^2\right)\cdot\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{x-\eta\mu x}\right] = +\infty$$

Για $x \in (0, \pi)$ είναι :

$$\lim_{x\to 0^+}\left(x+1+x^2\right) = 1 \ , \quad \lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x} = +\infty \ \text{ και}$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{-\eta\mu x + x} = \lim_{x\to 0^+}\frac{1}{-\eta\mu x - x - (-2x)} = \lim_{x\to 0^+}\frac{1}{f(x)-(-2x)}$$

Για $x \in (0, \pi)$,f κυρτή άρα $f(x) > -2x$ και επιπλέον $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(f(x)-(-2x)\right) = 0$

Άρα $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{f(x)-(-2x)} = +\infty$

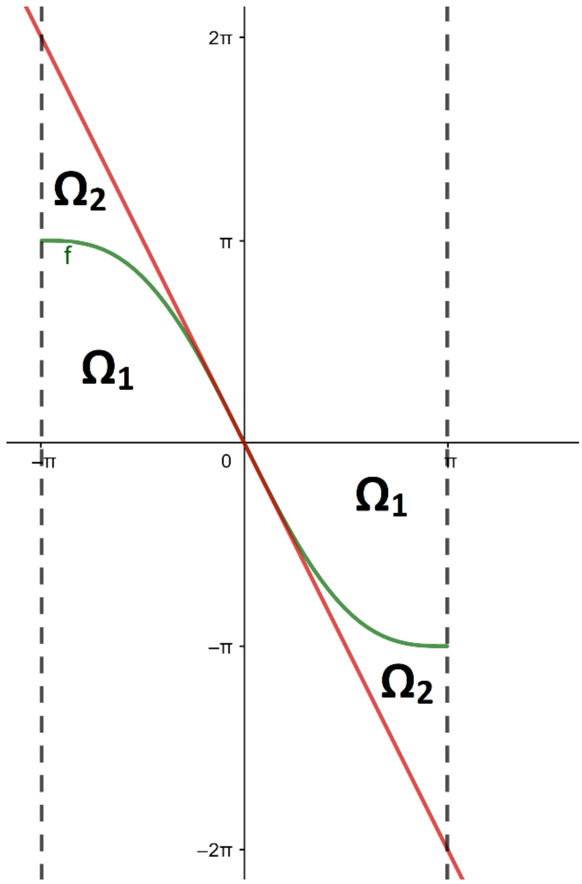
Οπότε

$$\lim_{x\to 0^+}\left[\left(x+1+x^2\right)\cdot\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{x-\eta\mu x}\right]=+\infty$$

Άρα $A=+\infty$

Ε)Με τη βοήθεια της γραφικής παράστασης παρατηρούμε ότι:

$f(x)\geq 0$ για κάθε $x\in[-\pi,0]$ και $f(x)\leq 0$ για κάθε $x\in[0,\pi]$,με την ισότητα να ισχύει και στις δυο περιπτώσεις για $x=0$



Επομένως:

$$E(\Omega_1)=\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)|\,dx=\int_{-\pi}^{0}f(x)dx-\int_{0}^{\pi}f(x)dx=\int_{-\pi}^{0}(-\eta\mu x-x)dx-\int_{0}^{\pi}(-\eta\mu x-x)dx=$$

$$\int_{-\pi}^{0}(-\eta\mu x-x)dx+\int_{0}^{\pi}(\eta\mu x+x)dx=\left[\sigma\upsilon\nu x-\frac{x^2}{2}\right]_{-\pi}^{o}+\left[-\sigma\upsilon\nu x+\frac{x^2}{2}\right]_{0}^{\pi}=$$

$$\sigma\upsilon\nu 0-0-\left(\sigma\upsilon\nu(-\pi)-\frac{\pi^2}{2}\right)-\sigma\upsilon\nu\pi+\frac{\pi^2}{2}+\sigma\upsilon\nu 0-0=$$

$$1+1+\frac{\pi^2}{2}+1+\frac{\pi^2}{2}+1=4+\pi^2$$

Επιπλέον γνωρίζουμε ότι:

$f(x) \le -2x$ για $x \in [-\pi, 0]$ και $f(x) \ge -2x$ για $x \in [0, \pi]$ επομένως

$$E(\Omega_2) = \int_{-\pi}^{\pi} |f(x) + 2x|\,dx = -\int_{-\pi}^{0} \big(f(x) + 2x\big)dx + \int_{0}^{\pi} \big(f(x) + 2x\big)dx =$$

$$-\int_{-\pi}^{0} (-\eta\mu x - x + 2x)\,dx + \int_{0}^{\pi} (-\eta\mu x - x + 2x)\,dx = \int_{-\pi}^{0} (\eta\mu x - x)\,dx + \int_{0}^{\pi} (-\eta\mu x + x)\,dx =$$

$$-\left[\sigma\upsilon\nu x + \frac{x^2}{2}\right]_{-\pi}^{o} + \left[\sigma\upsilon\nu x + \frac{x^2}{2}\right]_{0}^{\pi} = -\left[\sigma\upsilon\nu 0 + 0 - \sigma\upsilon\nu(-\pi) - \frac{\pi^2}{2}\right] + \sigma\upsilon\nu\pi + \frac{\pi^2}{2} - \sigma\upsilon\nu 0 - 0 =$$

$$= -1 - 1 + \frac{\pi^2}{2} - 1 + \frac{\pi^2}{2} - 1 = \pi^2 - 4$$

Τελικά $E(\Omega_1) > E(\Omega_2)$

Στ) Έστω η συνάρτηση $g(x) = \dfrac{f(x)}{x^2 + 1} = -\dfrac{\eta\mu x + x}{x^2 + 1}, x \in [-\pi, \pi]$

Για κάθε $x \in [-\pi, \pi]$ και $-x \in [-\pi, \pi]$. Επιπλέον για κάθε $x \in [-\pi.\pi]$ έχουμε:

$$g(-x) = -\frac{\eta\mu(-x) - x}{(-x)^2 + 1} = \frac{\eta\mu x + x}{x^2 + 1} = g(x),$$

άρα g περιττή, επομένως $g(-x) = -g(x) \Leftrightarrow g(x) = -g(-x)$ (1).

Το ολοκλήρωμα γίνεται:

$$I = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(x)}{x^2 + 1}dx = \int_{-\pi}^{\pi} g(x)dx = \int_{-\pi}^{0} g(x)dx + \int_{0}^{\pi} g(x)dx \overset{(1)}{=} \int_{-\pi}^{0} -g(-x)dx + \int_{0}^{\pi} g(x)dx$$

Δουλεύουμε χωριστά το ολοκλήρωμα $I_1 = \int_{-\pi}^{0} -g(-x)dx$.

Θέτουμε $u = -x$, άρα $du = -dx$.

Τα όρια ολοκλήρωσης θα γίνουν:

- Για $x = -\pi \Rightarrow u = \pi$
- $x = o \Rightarrow u = o$

Άρα το ολοκλήρωμα θα γίνει:

$$I_1 = \int_{-\pi}^{0} -g(-x)dx = \int_{\pi}^{0} g(u)du = \int_{\pi}^{0} g(x)dx$$

Επιστρέφουμε στον αρχικό μας υπολογισμό και έχουμε:

$$I = \int_{-\pi}^{0} -g(-x)dx + \int_{0}^{\pi} g(x)dx = \int_{\pi}^{0} g(x)dx + \int_{0}^{\pi} g(x)dx = 0$$