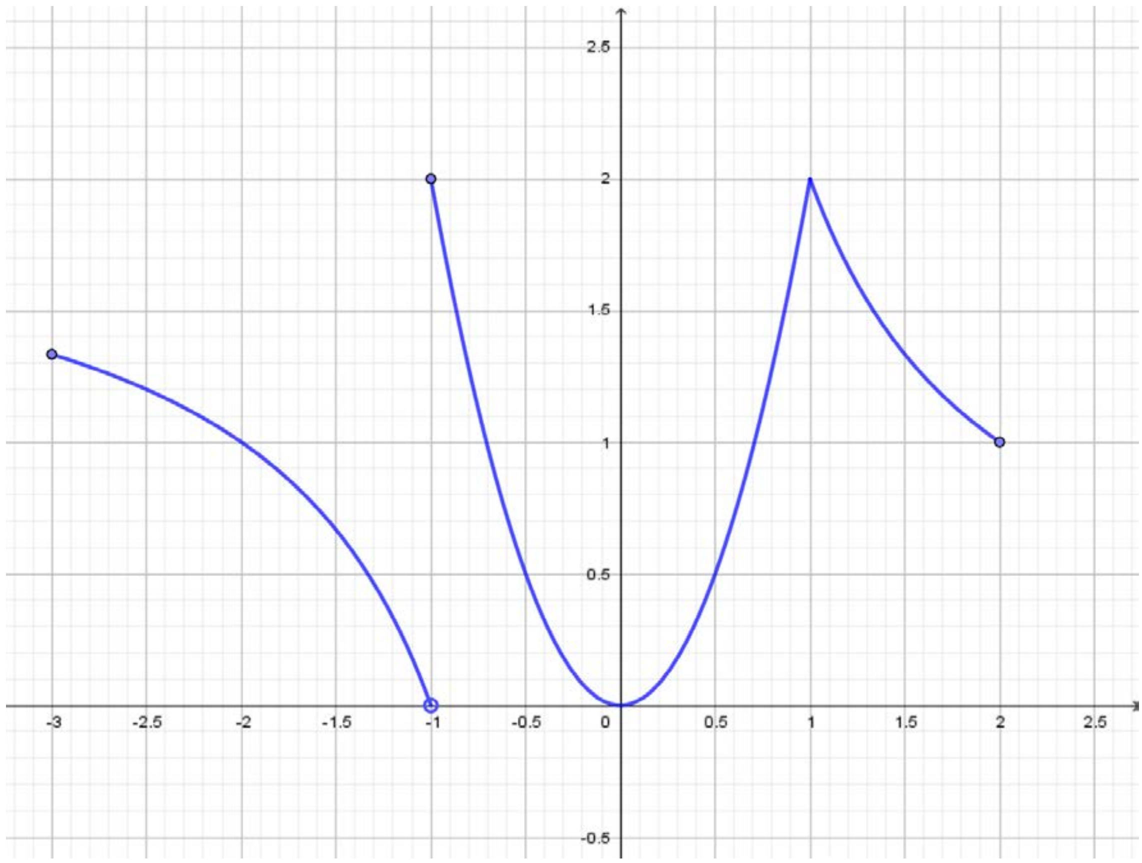
**ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ Γ ΛΥΚΕΙΟΥ**

**ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΑ ΘΕΜΑΤΑ**

## ΑΣΚΗΣΗ 1

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f.




**α.** Να βρείτε το πεδίο ορισμού A της f και το σύνολο τιμών της $f(A)$ .

**β.** Να υπολογίσετε (αν υπάρχουν) τα όρια :

i) $\lim\limits_{x\to -1} f(x)$

ii) $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$

iii) $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$

**γ.** Να υπολογίσετε (αν υπάρχουν) τα όρια :

i) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{f(x)}$

ii) $\lim\limits_{x\to -1^-}\dfrac{1}{f(x)}$

iii) $\lim\limits_{x\to 1} f\left(f(x)\right)$

iv) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{1}{f(x)-1}$

**δ.** Να εξετάσετε αν η f είναι συνεχής στο $[-1,1]$ .

**ε.** Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=5x-2$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο $(-1,1)$ .

**Λύση**

**α.** Η f έχει πεδίο ορισμού το $A=[-3,2]$ και σύνολο τιμών το $f(A)=[0,2]$ .

**β.** i) Από τη γραφική παράσταση της f έχουμε :

$$\left.\begin{array}{l}\bullet\ \lim\limits_{x\to -1^-} f(x)=0\\ \bullet\ \lim\limits_{x\to -1^+} f(x)=2\end{array}\right\}\Rightarrow \text{το όριο } \lim\limits_{x\to -1} f(x) \text{ δεν υπάρχει.}$$

ii) Από τη γραφική παράσταση της f έχουμε:

$$\left.\begin{array}{l}\bullet\ \lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=2\\ \bullet\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=2\end{array}\right\}\Rightarrow \lim\limits_{x\to 1} f(x)=2$$

iii) Από τη γραφική παράσταση της f έχουμε:

$$\lim\limits_{x\to 2} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=1$$

**γ.** i) Είναι $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0$ και $f(x)>0$ κοντά στο 0, άρα $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{f(x)}=+\infty$ .

ii) Είναι $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x)=0$ και $f(x)>0$ για $x\in[-3,-1)$ , άρα $\lim\limits_{x\to -1^-}\dfrac{1}{f(x)}=+\infty$ .

iii) Θέτω $u=f(x)$ . Τότε $\lim\limits_{x\to 1} u=\lim\limits_{x\to 1} f(x)\overset{\beta\ ii}{=}2$ οπότε έχουμε :

$\lim_{x\to 1} f(f(x)) \overset{u=f(x)}{=} \lim_{u\to 2} f(u) = 1$ .

iv) Για $x \in [-3,-2)$ έχουμε

$\lim_{x\to -2^-} f(x) = 1 \Leftrightarrow \lim_{x\to -2^-} (f(x)-1) = 0$ και $f(x) > 1 \Leftrightarrow f(x) - 1 > 0$ , άρα

$\lim_{x\to -2^-} \frac{1}{f(x)-1} = +\infty$

Για $x \in (-2,-1)$ έχουμε

$\lim_{x\to -2^+} f(x) = 1 \Leftrightarrow \lim_{x\to -2^+} (f(x)-1) = 0$ και $f(x) < 1 \Leftrightarrow f(x) - 1 < 0$ , άρα

$\lim_{x\to -2^+} \frac{1}{f(x)-1} = -\infty$

Επομένως το $\lim_{x\to -2} \frac{1}{f(x)-1}$ δεν υπάρχει.

**δ.** Η f είναι συνεχής στο $(-1,1)$ . Επιπλέον έχουμε :

$\lim_{x\to -1^+} f(x) = f(-1) = 2$ και $\lim_{x\to 1^-} f(x) = f(1) = 2$ , άρα η f είναι συνεχής στο $[-1,1]$ .

**ε.** Θέτω $g(x) = f(x) - 5x + 2$ , $x \in [-1,1]$ .

Η g είναι συνεχής στο $[-1,1]$ ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων και επιπλέον έχουμε :

$$\left.\begin{array}{l} g(-1) = f(-1) + 5 + 2 = 9 > 0 \\ g(1) = f(1) - 5 + 2 = -1 < 0 \end{array}\right\} \Rightarrow g(-1)\cdot g(1) < 0$$

Άρα η g ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του θεωρήματος Bolzano στο $[-1,1]$ και επομένως η εξίσωση $g(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) - 5x + 2 = 0 \Leftrightarrow f(x) = 5x - 2$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $(-1,1)$ .

**ΑΣΚΗΣΗ 2**

Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν :

- $f(x)+f'(x)=2x\cdot e^{-x}$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$

- $f(0)=1$

**α.** Να βρείτε τον τύπο της f.

Αν $f(x)=\dfrac{x^2+1}{e^x}$ τότε :

**β.** Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

**γ.** Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη κυρτότητα και να βρείτε τα σημεία καμπής της γραφικής της παράστασης.

**δ.** Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της f και να παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση f.

**ε.** Να δείξετε ότι η εξίσωση $x^2-\left(e^{\lambda}-\lambda\right)\cdot e^x+1=0$ , $\lambda\in\mathbb{R}$ έχει μοναδική ρίζα για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}$ .

**στ.** Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f, τον άξονα $x'x$ καθώς και τις ευθείες $x=1$ και $x=3$ .

**Λύση**

**α.** <u>1ος τρόπος</u>

Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ έχουμε :

$$f(x)+f'(x)=2x\cdot e^{-x}\overset{\cdot e^x}{\Leftrightarrow} e^x\cdot f(x)+e^x\cdot f'(x)=2x\Leftrightarrow\left(e^x\cdot f(x)\right)'=\left(x^2\right)'$$

$$\Leftrightarrow e^x\cdot f(x)=x^2+c\Leftrightarrow f(x)=\frac{x^2+c}{e^x}\quad,\ c\in\mathbb{R}$$

Όμως $f(0)=1$ , άρα $f(0)=1\Leftrightarrow\dfrac{0^2+c}{e^0}=1\Leftrightarrow c=1$

Επομένως $f(x)=\dfrac{x^2+1}{e^x}$ , $x\in\mathbb{R}$ .

<u>2ος τρόπος</u>

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x)=e^x\cdot f(x)-x^2-1$ , $x\in\mathbb{R}$ .

Η g είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με

$$g'(x)=\left(e^x\cdot f(x)-x^2-1\right)'=\left(e^x\cdot f(x)\right)'-\left(x^2\right)'-(1)'=\left(e^x\right)'\cdot f(x)+e^x\cdot f'(x)-2x$$
$$=e^x\cdot f(x)+e^x\cdot f'(x)-2x=e^x\cdot\left(f(x)+f'(x)\right)-2x=e^x\cdot 2x\cdot e^{-x}-2x$$
$$=2x\cdot e^0-2x=2x-2x=0$$

Άρα η g είναι σταθερή στο $\mathbb{R}$ . Δηλαδή

$$g(x)=c\Leftrightarrow e^x\cdot f(x)-x^2-1=c\ ,\textit{για κάθε }\ x\in\mathbb{R}\quad (1)$$

Από τη σχέση (1) για παίρνουμε $e^0\cdot f(0)-0^2-1=c\Leftrightarrow 1-1=c\Leftrightarrow c=0$ .

Επομένως , $e^x\cdot f(x)-x^2-1=0\ \Leftrightarrow\ e^x\cdot f(x)=x^2+1\ \Leftrightarrow\ f(x)=\dfrac{x^2+1}{e^x}$ , $x\in\mathbb{R}$

**β.** Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με

$$f'(x)=\left(\frac{x^2+1}{e^x}\right)'=\frac{\left(x^2+1\right)'\cdot e^x-\left(x^2+1\right)\cdot\left(e^x\right)'}{\left(e^x\right)^2}=\frac{2x\cdot e^x-\left(x^2+1\right)\cdot e^x}{e^{2x}}$$
$$=\frac{e^x\left(2x-x^2-1\right)}{e^{2x}}=\frac{2x-x^2-1}{e^x}=-\frac{x^2-2x+1}{e^x}=-\frac{(x-1)^2}{e^x}<0\quad\textit{για κάθε}\quad x\neq 1$$

Άρα $f'(x)<0$ για κάθε $x\in(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$ και επειδή είναι συνεχής στο $x_0=1$ (ως παραγωγίσιμη) , προκύπτει ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$ και επομένως δεν έχει ακρότατα.

**γ.** Η $f'$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με

$$f''(x)=\left(-\frac{(x-1)^2}{e^x}\right)'=\left(\frac{-x^2+2x-1}{e^x}\right)'=\frac{\left(-x^2+2x-1\right)'\cdot e^x-\left(-x^2+2x-1\right)\cdot\left(e^x\right)'}{\left(e^x\right)^2}$$
$$=\frac{(-2x+2)\cdot e^x-\left(-x^2+2x-1\right)\cdot e^x}{e^{2x}}=\frac{e^x\left(-2x+2+x^2-2x+1\right)}{e^{2x}}=\frac{x^2-4x+3}{e^x}$$

Οπότε έχουμε

- $f''(x)=0\Leftrightarrow\dfrac{x^2-4x+3}{e^x}=0\Leftrightarrow x^2-4x+3=0\Leftrightarrow x=1\ \textit{ή}\ x=3$
- $f''(x)>0\Leftrightarrow\dfrac{x^2-4x+3}{e^x}>0\overset{e^x>0}{\Leftrightarrow}x^2-4x+3>0\Leftrightarrow x<1\ \textit{ή}\ x>3$
- $f''(x)<0\Leftrightarrow 1<x<3$

Προκύπτει λοιπόν ο παρακάτω πίνακας

| x | $-\infty \qquad\qquad 1$ | | $3 \qquad +\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f''(x)$ | $+$ | $-$ | $+$ |
| $f(x)$ | $\cup$ | $\cap$ | $\cup$ |

Επομένως :

- η f είναι κυρτή στα διαστήματα $(-\infty,1]$ και $[3,+\infty)$
- η f είναι κοίλη στο διάστημα $[1,3]$
- τα σημεία $A(1,f(1))$ και $B(3,f(3))$ , δηλαδή τα σημεία $A\left(1,\frac{2}{e}\right)$ και $B\left(3,\frac{10}{e^3}\right)$ είναι σημεία καμπής της γραφικής παράστασης της f .

**δ.** Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ άρα δεν έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες.

Στο $+\infty$ :

- $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2+1}{x\cdot e^x}\underset{D.L.H.}{\overset{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{=}}\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2x}{e^x+xe^x}\underset{D.L.H.}{\overset{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{=}}\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2}{e^x+e^x+x\cdot e^x}=0$

  αφού $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(e^x+e^x+x\cdot e^x\right)=+\infty$

- $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2+1}{e^x}\underset{D.L.H.}{\overset{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{=}}\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2x}{e^x}\underset{D.L.H.}{\overset{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{=}}\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2}{e^x}=0$

άρα η ευθεία $y=0$ , δηλαδή ο άξονας $x'x$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της $C_f$ στο $+\infty$ .

Στο $-\infty$

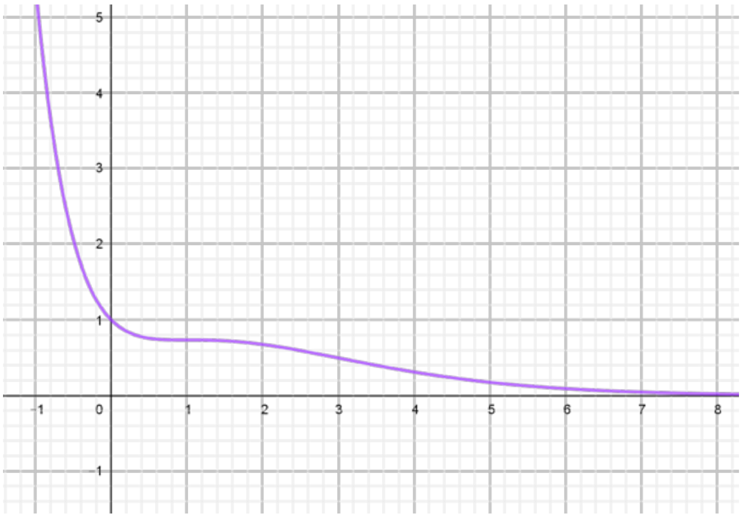
- $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x^2+1}{x\cdot e^x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[\frac{x^2+1}{x}\cdot\frac{1}{e^x}\right]=-\infty$

αφού $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x^2+1}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x^2}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}x=-\infty$ και

$\lim\limits_{x\to-\infty}e^x=0$ , $e^x>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ , άρα $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{e^x}=+\infty$

άρα η $C_f$ δεν έχει ασύμπτωτη στο $-\infty$ .

Η γραφική παράσταση της f φαίνεται στο παρακάτω σχήμα




**ε.** Για $x \in \mathbb{R}$ έχουμε

$$x^2 - \left(e^\lambda - \lambda\right)e^x + 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 + 1 = \left(e^\lambda - \lambda\right)e^x \Leftrightarrow \frac{x^2+1}{e^x} = e^\lambda - \lambda \Leftrightarrow f\left(x\right) = e^\lambda - \lambda$$

Η f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$ , άρα έχει σύνολο τιμών το $f\left(\mathbb{R}\right) = \left(\lim\limits_{x\to+\infty} f\left(x\right), \lim\limits_{x\to-\infty} f\left(x\right)\right) = \left(0,+\infty\right)$ .

Για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ έχουμε $e^\lambda \geq \lambda + 1 \Leftrightarrow e^\lambda - \lambda \geq 1 > 0$ , άρα $\left(e^\lambda - \lambda\right) \in f\left(\mathbb{R}\right)$ και αφού η f είναι γνησίως μονότονη η εξίσωση $f\left(x\right) = e^\lambda - \lambda$ έχει μοναδική ρίζα για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ .

**στ.** Είναι $E\left(\Omega\right) = \int_1^3 \left|f\left(x\right)\right| dx$ . Είναι $f\left(x\right) > 0$ για κάθε $x \in \left[1,3\right]$ άρα

$$E\left(\Omega\right) = \int_1^3 f\left(x\right)dx = \int_1^3 \frac{x^2+1}{e^x}dx = \int_1^3 \left(x^2+1\right)e^{-x}\,dx = \int_1^3 \left(x^2+1\right)\left(-e^{-x}\right)'\,dx$$

$$= \left[-e^{-x}\left(x^2+1\right)\right]_1^3 - \int_1^3 2x\cdot\left(-e^{-x}\right)dx = -10e^{-3} + 2e^{-1} - \int_1^3 2x\left(e^{-x}\right)'\,dx$$

$$= 2e^{-1} - 10e^{-3} - \left[2x\cdot e^{-x}\right]_1^3 + \int_1^3 2e^{-x}dx = 2e^{-1} - 10e^{-3} - \left(6e^{-3} - 2e^{-1}\right) + \left[-2e^{-x}\right]_1^3$$

$$= 2e^{-1} - 10e^{-3} - 6e^{-3} + 2e^{-1} - 2e^{-3} + 2e^{-1} = 6e^{-1} - 18e^{-3} = \frac{6}{e} - \frac{18}{e^3} = \frac{6e^2-18}{e^3} \quad \tau.\mu.$$