ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ Γ ΛΥΚΕΙΟΥ

Άσκηση 1

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν:

• $f(0)=\ln 3$

• $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+2h)-f(x)}{h}=\dfrac{4x+4}{x^2+2x+3}$

α) Να δείξετε ότι $f(x)=\ln\left(x^2+2x+3\right)$.

β) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα και να βρείτε το σύνολο τιμών.

γ) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς την κυρτότητα και να βρείτε τα σημεία καμπής.

δ) Να δείξετε ότι εξίσωση $x^2+2x+3=e^{2019}$ έχει δύο μοναδικές ρίζες.

ε) Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sigma\upsilon\nu f(x)}{e^{f(x)}}$.

Λύση

α) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+2h)-f(x)}{h}=\lim\limits_{u\to 0}\dfrac{f(x+u)-f(x)}{\frac{u}{2}}=2\lim\limits_{u\to 0}\dfrac{f(x+u)-f(x)}{u}=2f'(x)$

θέτω $u=2h\Leftrightarrow h=\dfrac{u}{2}$ και $\lim\limits_{h\to 0}2h=0$

επομένως $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+2h)-f(x)}{h}=\dfrac{4x+4}{x^2+2x+3}\Leftrightarrow 2f'(x)=\dfrac{4x+4}{x^2+2x+3}\Leftrightarrow f'(x)=\dfrac{2x+2}{x^2+2x+3}$

άρα $(f(x))'=\left(\ln\left(x^2+2x+3\right)\right)'$.

Από συνέπειες Θ.Μ.Τ προκύπτει $f(x)=\ln\left(x^2+2x+3\right)+c$ και αφού $f(0)=\ln 3$ τότε $c=0$,άρα $f(x)=\ln\left(x^2+2x+3\right)$

β) Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με

$$f'(x)=\frac{1}{x^2+2x+3}\left(x^2+2x+3\right)'=\frac{2x+2}{x^2+2x+3}=\frac{2(x+1)}{x^2+2x+3}$$

$f'(x)=0 \Leftrightarrow \dfrac{2(x+1)}{x^2+2x+3}=0 \Leftrightarrow x=-1$

Άρα , έχουμε :

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$f'(x)$	$-$		$+$
$f(x)$	$\searrow$		$\nearrow$

Ο.Ε

Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(-\infty,-1]$.

Η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[-1,+\infty)$ . .

Η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο $x_o=-1$ το $f(-1)=\ln 2$.

- Έστω $\Delta_1=(-\infty,-1)$ και $\Delta_2=[-1,+\infty)$.
- Η f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο Δ_1 ,άρα

  $f(\Delta_1)=\left(\lim\limits_{x\to -1^-} f(x), \lim\limits_{x\to -\infty} f(x)\right)=(\ln 2,+\infty)$ αφού

  $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to -\infty} \ln\left(x^2+2x+3\right)=\lim\limits_{u\to +\infty} \ln u=+\infty$,

  θέτω $u=x^2+2x+3$ και $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(x^2+2x+3\right)=\lim\limits_{x\to -\infty} x^2=+\infty$

  $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to -1^-} \ln(x^2+2x+3)=\ln 2$
- Η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο Δ_2 ,άρα

  $f(\Delta_2)=\left[f(-1), \lim\limits_{x\to +\infty} f(x)\right)=[\ln 2,+\infty)$ αφού

  $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to +\infty} \ln\left(x^2+2x+3\right)=\lim\limits_{u\to +\infty} \ln u=+\infty$,

  θέτω $u=x^2+2x+3$ και $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(x^2+2x+3\right)=\lim\limits_{x\to +\infty} x^2=+\infty$

  Άρα $f(A)=f(\Delta_1)\cup f(\Delta_2)=[\ln 2,+\infty)$.

γ) Η f' είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με

$$f''(x)=\frac{(2x+2)'\left(x^2+2x+3\right)-(2x+2)\left(x^2+2x+3\right)'}{(x^2+2x+3)^2}=\frac{2\left(x^2+2x+3\right)-(2x+2)(2x+2)}{(x^2+2x+3)^2}=\frac{2\left(-x^2-2x+1\right)}{(x^2+2x+3)^2}$$

$f''(x)=0\Rightarrow -x^2-2x+1=0\Rightarrow x=-1-\sqrt{2}$ ή $x=-1+\sqrt{2}$

Άρα τελικά έχουμε :

x	$-\infty$	$-1-\sqrt{2}$	$-1+\sqrt{2}$ $\quad$ $+\infty$
$f''(x)$	$-$	$+$	$-$
$f(x)$	$\frown$	$\smile$	$\frown$

Σ.Κ $\qquad$ Σ.Κ

- Η f είναι κοίλη στα $\left(-\infty,-1-\sqrt{2}\right]$, $\left[-1+\sqrt{2},+\infty\right)$.
- Η f είναι κυρτή στο $\left[-1-\sqrt{2},-1+\sqrt{2}\right]$.
- Η f παρουσιάζει καμπή στο $x_1=-1-\sqrt{2}$ με σημείο καμπής το $\left(-1-\sqrt{2},f\left(-1-\sqrt{2}\right)\right)$ ή $\left(-1-\sqrt{2},\ln 4\right)$.
- Η f παρουσιάζει καμπή στο $x_2=-1+\sqrt{2}$ με σημείο καμπής το $\left(-1+\sqrt{2},f\left(-1+\sqrt{2}\right)\right)$ ή $\left(-1+\sqrt{2},\ln 4\right)$.

δ) Η εξίσωση γράφεται ισοδύναμα :

$x^2+2x+3=e^{2019}\Leftrightarrow \ln\left(x^2+2x+3\right)=2019\Leftrightarrow f(x)=2019$

Επειδή $2019\in f(\Delta_1)$, $2019\in f(\Delta_2)$ η $f(x)=2019$ έχει δύο τουλάχιστον ρίζες στα Δ_1,Δ_2 και επειδή είναι γνησίως μονότονη σε καθένα από τα Δ_1,Δ_2 η εξίσωση $f(x)=2019$ έχει ακριβώς δύο ρίζες.

ε) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sigma\upsilon\nu f(x)}{e^{f(x)}}=\lim\limits_{u\to+\infty}\dfrac{\sigma\upsilon\nu u}{e^u}=0$,

θέτω $u=f(x)$ με $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$

Διότι: $\left|\dfrac{\sigma\upsilon\nu u}{e^u}\right|=\dfrac{|\sigma\upsilon\nu u|}{|e^u|}\le\dfrac{1}{e^u}$ άρα $-\dfrac{1}{e^u}\le\dfrac{\sigma\upsilon\nu u}{e^u}\le\dfrac{1}{e^u}$

Είναι $\lim\limits_{u\to+\infty}e^u=+\infty$, άρα

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{u\to+\infty}(-\frac{1}{e^u})=0\\ \lim\limits_{u\to+\infty}\frac{1}{e^u}=0\end{array}\right\}\Rightarrow \text{ από Κριτήριο Παρεμβολής } \lim\limits_{u\to+\infty}\frac{\sigma\upsilon\nu u}{e^u}=0$$

Άσκηση 2

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν:

• $f(0)=-\ln 2$

• $e^{f(x)}=1+f'(x)$ *για κάθε* $x\in\mathbb{R}$

α) Να δείξετε ότι $f(x)=-\ln\left(e^x+1\right), x\in\mathbb{R}$.

β) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς την κυρτότητα και στη συνέχεια να δείξετε ότι $\int_0^1 f(x)dx<-\frac{1+4\ln 2}{4}$.

Έστω F μία παράγουσα της f στο $\mathbb{R}$ με $F(0)=0$.

γ) Να λυθεί η εξίσωση $F\left(x^2\right)+F(\ln x)=F(x)+F(0)$ για $x>0$.

δ) Να δείξετε $F(-x)=-F(x)-\frac{x^2}{2}$ και στη συνέχεια να υπολογίσετε το $\int_{-1}^{1}F(x)dx$.

Λύση

α) Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ έχω:

$$e^{f(x)}=1+f'(x)\overset{\cdot e^{-f(x)}}{\Rightarrow}1=e^{-f(x)}+f'(x)\cdot e^{-f(x)}\Rightarrow$$
$$e^{-f(x)}-\left(e^{-f(x)}\right)'=1\Rightarrow\left(e^{-f(x)}\right)'-e^{-f(x)}=-1$$

Θέτω $g(x)=e^{-f(x)}$. Τότε έχουμε:

$$g'(x)-g(x)=-1\Rightarrow e^{-x}g'(x)-e^{-x}g(x)=-e^{-x}\Rightarrow\left(e^{-x}\cdot g(x)\right)'=\left(e^{-x}\right)'$$

επομένως από συνέπειες Θεωρήματος Μέσης Τιμής έχουμε:

$e^{-x}\cdot g(x)=e^{-x}+c$

Για $x=0$ έχω : $g(0)=1+c\Rightarrow e^{-f(0)}=1+c\Rightarrow c=1$

άρα $e^{-x}\cdot g(x)=e^{-x}+1\Rightarrow e^{-f(x)}=1+e^{x}\Rightarrow$

$\ln e^{-f(x)}=\ln\left(e^{x}+1\right)\Rightarrow -f(x)=\ln\left(e^{x}+1\right)\Rightarrow f(x)=-\ln\left(e^{x}+1\right)$

β) Η f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x)=-\frac{1}{e^{x}+1}\cdot\left(e^{x}+1\right)'=-\frac{e^{x}}{e^{x}+1}$

Η f' παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με

$$f''(x)=-\frac{\left(e^{x}\right)'\left(e^{x}+1\right)-e^{x}\left(e^{x}+1\right)'}{\left(e^{x}+1\right)^{2}}=-\frac{e^{x}\left(e^{x}+1\right)-e^{x}\cdot e^{x}}{\left(e^{x}+1\right)^{2}}$$

$=-\frac{e^{2x}+e^{x}-e^{2x}}{\left(e^{x}+1\right)^{2}}=-\frac{e^{x}}{\left(e^{x}+1\right)^{2}}<0$. Επομένως η f είναι κοίλη στο $\mathbb{R}$.

Βρίσκουμε την εφαπτομένη της C_f στο σημείο $\mathrm{A}(0, f(0))$.

$(\varepsilon): y-f(0)=f'(0)(x-0)\Rightarrow y+\ln 2=-\frac{1}{2}x\Rightarrow y=-\frac{1}{2}x-\ln 2$.

Αφού η f είναι κοίλη στο $\mathbb{R}$ τότε η C_f βρίσκεται κάτω από την εφαπτομένη, εκτός του κοινού σημείου επαφής που είναι το $\mathrm{A}(0,-\ln 2)$.Άρα

$f(x)\le y\Rightarrow f(x)\le-\frac{1}{2}x-\ln 2$,η ισότητα ισχύει για $x=0$.

Επομένως έχουμε :

$$\int_0^1 f(x)dx<\int_0^1\left(-\frac{1}{2}x-\ln 2\right)dx\Rightarrow\int_0^1 f(x)dx<\left[-\frac{x^{2}}{4}-\ln 2\cdot x\right]_0^1\Rightarrow$$

$$\int_0^1 f(x)dx<-\frac{1}{4}-\ln 2\Rightarrow\int_0^1 f(x)dx<-\frac{1+4\ln 2}{4}.$$

γ) Αφού η F μία παράγουσα της f στο $\mathbb{R}$,τότε

$F'(x)=f(x)=-\ln\left(e^{x}+1\right)<0$

αφού $e^{x}>0\Rightarrow e^{x}+1>1\Rightarrow\ln\left(e^{x}+1\right)>\ln 1\Rightarrow-\ln\left(e^{x}+1\right)<0$

Επομένως η F είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$.

• Προφανής ρίζα της εξίσωσης η $x=1$

• Για $0<x<1$ έχουμε:

$$x^2<x \overset{F\downarrow}{\Rightarrow} F\left(x^2\right)>F\left(x\right)\ (1)$$

$$\ln x<\ln 1 \overset{F\downarrow}{\Rightarrow} F\left(\ln x\right)>F\left(\ln 1\right) \Rightarrow F\left(\ln x\right)>F\left(0\right)\ (2)$$

Προσθέτω τις (1),(2) κατά μέλη και έχω:

$$F\left(x^2\right)+F\left(\ln x\right)>F\left(x\right)+F\left(0\right)\ .$$

Επομένως η εξίσωση δεν έχει ρίζα στο $\left(0,1\right)$

• Για $x>1$ έχουμε:

$$x^2>x \overset{F\downarrow}{\Rightarrow} F\left(x^2\right)<F\left(x\right)\ (3)$$

$$\ln x>\ln 1 \overset{F\downarrow}{\Rightarrow} F\left(\ln x\right)<F\left(\ln 1\right) \Rightarrow F\left(\ln x\right)<F\left(0\right)\ (4)$$

Προσθέτω τις (3),(4) κατά μέλη και έχω:

$$F\left(x^2\right)+F\left(\ln x\right)<F\left(x\right)+F\left(0\right)\ .$$

Επομένως η εξίσωση δεν έχει ρίζα στο $\left(1,+\infty\right)$.

Άρα η εξίσωση έχει μοναδική ρίζα τη $x=1$.

δ) Θεωρώ $g\left(x\right)=F\left(-x\right)+F\left(x\right)+\dfrac{x^2}{2}$

Για $x\in\mathbb{R}$ έχω:

$$g'\left(x\right)=-F'\left(-x\right)+F'\left(x\right)+\left(\frac{x^2}{2}\right)'=-f\left(-x\right)+f\left(x\right)+x=\ln\left(e^{-x}+1\right)-\ln\left(e^x+1\right)+x=$$
$$=\ln\left(1+\frac{1}{e^x}\right)-\ln\left(e^x+1\right)+x=\ln\left(\frac{e^x+1}{e^x}\right)-\ln\left(e^x+1\right)+x=\ln\left(e^x+1\right)-x-\ln\left(e^x+1\right)+x=0$$

Άρα, η g σταθερή στο $\mathbb{R}$.Άρα $g\left(x\right)=c\Rightarrow F\left(-x\right)+F\left(x\right)+\dfrac{x^2}{2}=c$

για $x=0$ προκύπτει $c=0$.Επομένως $g(x)=0 \Rightarrow F(-x)=-F(x)-\frac{x^2}{2}$.

$$\cdot\int_{-1}^{1} F(-x)\,dx=\int_{-1}^{1}\left(-F(x)-\frac{x^2}{2}\right)dx \Rightarrow \int_{-1}^{1} F(-x)\,dx=-\int_{-1}^{1} F(x)\,dx-\int_{-1}^{1}\frac{1}{2}x^2\,dx \quad (1)$$

$$\bullet\int_{-1}^{1}\frac{x^2}{2}\,dx=\left[\frac{x^3}{6}\right]_{-1}^{1}=\frac{1}{3}$$

$$\bullet\int_{-1}^{1} F(-x)\,dx=\int_{1}^{-1}-F(u)\,du=\int_{-1}^{1} F(x)\,dx$$

Αφού

$u=-x$

$du=-dx$

$x=-1 \Leftrightarrow u=1$

$x=1 \quad \Leftrightarrow u=-1$

επομένως η (1) γίνεται:

$$\int_{-1}^{1} F(x)\,dx=-\int_{-1}^{1} F(x)\,dx-\frac{1}{3} \Rightarrow 2\int_{-1}^{1} F(x)\,dx=-\frac{1}{3} \Rightarrow \int_{-1}^{1} F(x)\,dx=-\frac{2}{3} \ .$$