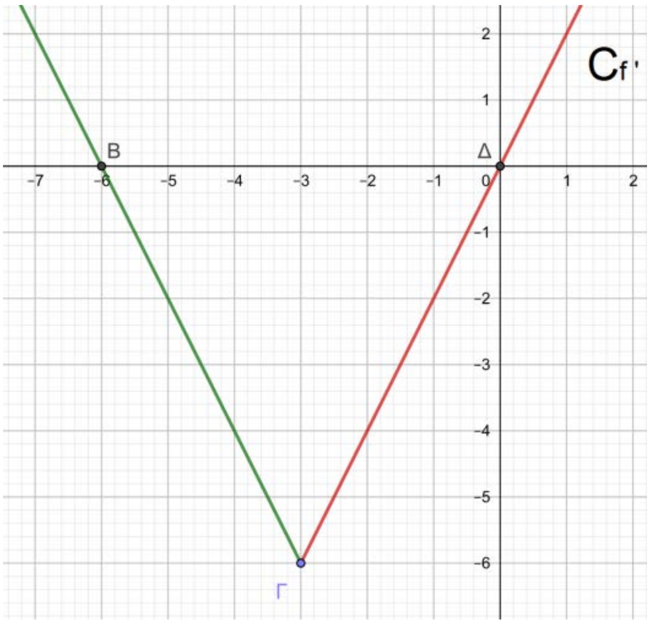
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ Γ ΛΥΚΕΙΟΥ

Άσκηση 1

Έστω παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της παραγώγου $f'(x)$ της συνάρτησης f.



Α)Να μελετήσετε την συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και την κυρτότητα.

Β)Αν γνωρίζετε ότι η C_f διέρχεται από το σημείο $A(-3,11)$,να βρείτε τον τύπο της f και να σχεδιάσετε την γραφική της παράσταση.

Γ)Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f τους άξονες x'x, y'y και την ευθεία x = -10

Δ)Αν το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f για $x\geq -3$ και την ευθεία $y=11$ έχει τριπλάσιο εμβαδόν από το χωρίο μεταξύ C_f για $x\geq -3$ και της ευθεία $y=\alpha^2+2$,να βρείτε την τιμή του α>0.

Λύση

Α)Με τη βοήθεια του σχήματος παρατηρούμε το πρόσημο της $f'(x)$. Έχουμε λοιπόν:

- $f'(x)>0$ στο $(-\infty,-6)$
- $f'(x)<0$ στο $(-6,0)$
- $f'(x)>0$ στο $(0,+\infty)$

Επομένως
- f γνησίως αύξουσα στο $(-\infty,-6]$
- f γνησίως φθίνουσα στο $[-6,0]$
- f γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$

Επίσης με τη βοήθεια του σχήματος παρατηρούμε τη μονοτονία της $f'(x)$. Έχουμε λοιπόν:

- $f'(x)$ γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty,-3]$
- $f'(x)$ γνησίως αύξουσα στο $[-3,+\infty)$

Επομένως

- f κοίλη στο $(-\infty,-3]$
- f κυρτή στο $[-3,+\infty)$

Β)Η γραφική παράσταση της $f\,'$ διέρχεται από τα σημεία $Β(-6,0)$,$Γ(-3,-6)$ και $Δ(0,0)$. Επίσης αποτελείται από δύο ευθείες, τους φορείς των τμημάτων ΒΓ και ΓΔ.

<u>Εύρεση της ευθείας ΒΓ</u>

$$\lambda_{ΒΓ}=\frac{-6-0}{-3+6}=-2\ ,\quad ΒΓ: y=-2(x+6)\Leftrightarrow y=-2x-12$$

<u>Εύρεση της ευθείας ΓΔ</u>

$$\lambda_{ΓΔ}=\frac{0+6}{0+3}=2\ ,\quad ΓΔ: y=2x$$

Έχουμε λοιπόν $f'(x)=\begin{cases}-2x-12, & x<-3\\ 2x, & x\geq -3\end{cases}$, άρα $f(x)=\begin{cases}-x^2-12x+c_1, & x<-3\\ x^2+c_2, & x\geq -3\end{cases}$

Γνωρίζουμε ότι η C_f διέρχεται από το σημείο $Α(-3,11)$ επομένως:

$$f(-3)=11\Leftrightarrow 9+c_2=11\Leftrightarrow c_2=2\ \text{, δηλαδή}\ f(x)=\begin{cases}-x^2-12x+c_1, & x<-3\\ x^2+2, & x\geq -3\end{cases}$$

Επιπλέον f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ άρα και συνεχής, επομένως

$$\lim_{x\to -3^-}f(x)=\lim_{x\to -3^+}f(x)=f\left(3\right)\Leftrightarrow -9+36+c_1=11\Leftrightarrow c_1=-16$$

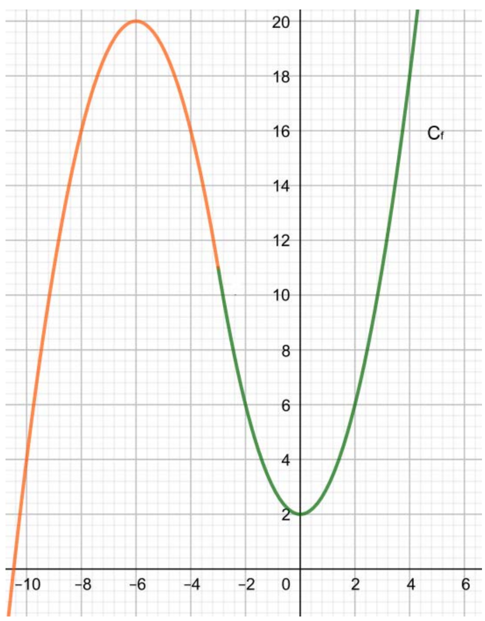
Τελικά $f(x)=\begin{cases}-x^2-12x-16, & x<-3\\ x^2+2, & x\geq -3\end{cases}$ ή $f(x)=\begin{cases}-x^2-12x-36+20, & x<-3\\ x^2+2, & x\geq -3\end{cases}$ ή

$$f(x)=\begin{cases}-(x+6)^2+20, & x<-3\\ x^2+2, & x\geq -3\end{cases}$$

Για $x<-3$ η C_f προκύπτει από μετατόπιση της $y=-x^2$, 6 θέσεις προς τα αριστερά και 20 θέσεις προς τα πάνω, ενώ

για $x\geq -3$ προκύπτει από μετατόπιση της $y=x^2$, 2 θέσεις προς τα πάνω.

Η γραφική παράσταση της f φαίνεται στο διπλανό σχήμα.



Γ)f συνεχής στο $[-10,0]$ και $f(x)>0$ στο $[-10,0]$.Επομένως:

$$E=\int_{-10}^{0}|f(x)|dx=\int_{-10}^{-3}f(x)dx+\int_{-3}^{0}f(x)dx=\int_{-10}^{0}(-x^2-12x-16)dx+\int_{-10}^{0}(x^2+2)dx=$$

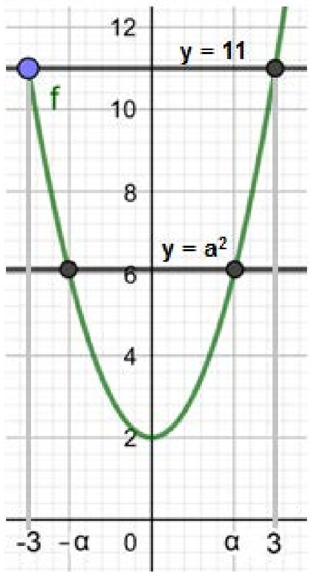
$$\left[-\frac{x^3}{3}-6x^2-16x\right]_{-10}^{-3}+\left[\frac{x^3}{3}+2x\right]_{-3}^{0}=\frac{27}{3}-54+48-\left(\frac{1000}{3}-600+160\right)+9+6=$$

$$458-\frac{1000}{3}=\frac{374}{3}$$

Δ) Για $x\geq-3$ έχουμε: $f(x)=11\Leftrightarrow x^2+2=11\Leftrightarrow x^2=9\Rightarrow x=\pm3$. Επομένως οι τετμημένες των σημείων τομής της C_f με την $y=11$ είναι $x=-3, x=3$.

Επιπλέον για $x\geq-3$ έχουμε: $f(x)=\alpha^2+2\Leftrightarrow x^2+2=\alpha^2+2\Leftrightarrow x^2=\alpha^2\Rightarrow x=\pm\alpha$. Επομένως οι τετμημένες των σημείων τομής της C_f με την $y=\alpha^2+2$ είναι $x=-\alpha, x=\alpha$.

Έστω E_1 το εμβαδόν του χωρίου μεταξύ C_f και ευθείας $y=11$ και E_2 το εμβαδόν του χωρίου μεταξύ C_f και ευθείας $y=\alpha^2+2$.



$$E_1=\int_{-3}^{3}(11-x^2-2)dx=\int_{-3}^{3}(9-x^2)dx=\left[9x-\frac{x^3}{3}\right]_{-3}^{3}=$$

$$=27-9+27-9=36$$

$$E_2=\int_{-\alpha}^{\alpha}(\alpha^2+2-x^2-2)dx=\int_{-\alpha}^{\alpha}(\alpha^2-x^2)dx=\left[\alpha^2x-\frac{x^3}{3}\right]_{-\alpha}^{\alpha}=$$

$$=\alpha^3-\frac{\alpha^3}{3}+\alpha^3-\frac{\alpha^3}{3}=\frac{4\alpha^3}{3}$$

Ισχύει $E_1=3E_2\Leftrightarrow 36=4\alpha^3\Leftrightarrow 9=\alpha^3\Leftrightarrow \alpha=\sqrt[3]{9}$

Άσκηση 2

Θεωρείστε συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

- $f(x)>0$
- $e^{2x}\ln f(x)-2xe^{2x}=f(x)-e^{2x}$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$

Α) Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f

Β) Να βρείτε το σημείο της C_f στο οποίο η εφαπτομένη της, σχηματίζει το μέγιστο εμβαδόν με τους άξονες x'x και y'y.

Γ) Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται μεταξύ της C_f , της εφαπτομένης του προηγούμενου ερωτήματος, της ευθείας x = - 1 και του άξονα y'y.

Δ) Να υπολογίσετε το όριο:

$$A=\lim_{x\to-\frac{1}{2}}\frac{2\eta\mu\left(x+\frac{1}{2}\right)}{(2x+1)(ef(x)-2x-2)}$$

Λύση

Α) Για $x\in\mathbb{R}$ έχουμε διαδοχικά:

$$e^{2x}\ln f(x)-2xe^{2x}=f(x)-e^{2x}\Leftrightarrow \ln f(x)-2x=\frac{f(x)}{e^{2x}}-1\Leftrightarrow \ln\frac{f(x)}{e^{2x}}=\frac{f(x)}{e^{2x}}-1 \text{ (1)}$$

Από γνωστή ανισότητα έχουμε ότι:

$\ln x\le x-1$ για κάθε $x>0$ με την ισότητα να ισχύει για $x=1$. Από σχέση (1) έχουμε λοιπόν ότι:

$$\frac{f(x)}{e^{2x}}=1\Rightarrow f(x)=e^{2x},\ x\in\mathbb{R}$$

Β)Έστω $(x_o,f(x_o))$ το σημείο που αναζητούμε. Η εφαπτομένη της C_f στο x_o θα είναι :

$$\varepsilon: y-f(x_o)=f'(x_o)(x-x_o) \quad ή \quad y-e^{2x_o}=2e^{2x_o}(x-x_o)$$

Η ε τέμνει τον x'x για $y=0$, άρα έχουμε:

$$-e^{2x_o}=2e^{2x_o}\cdot x-2e^{2x_o}\cdot x_o\Leftrightarrow -1=2x-2x_o\Leftrightarrow x=x_o-\frac{1}{2}$$

Το $\left(x_o-\frac{1}{2},0\right)$ είναι το σημείο τομής της ε με τον x'x.

Η ε τέμνει τον y'y για $x=0$,άρα έχουμε:

$$y-e^{2x_o}=-2e^{2x_o}\cdot x_o\Leftrightarrow y=e^{2x_o}-2e^{2x_o}\cdot x_o\Leftrightarrow y=e^{2x_o}(1-2x_o)$$

Το $\left(0,e^{2x_o}(1-2x_o)\right)$ είναι το σημείο τομής της ε με τον y'y.

Το $\left(0,e^{2x_o}(1-2x_o)\right)$ βρίσκεται στον θετικό ημιάξονα Oy, επομένως $e^{2x_o}(1-2x_o)>0 \Leftrightarrow x_o<\frac{1}{2}$.

Το εμβαδόν του τριγώνου θα είναι ίσο με:

$$E=\frac{1}{2}|x_o-\frac{1}{2}|\cdot|e^{2x_o}-2e^{2x_o}\cdot x_o|\overset{\left(x_o<\frac{1}{2}\right)}{=}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-x_o\right)(e^{2x_o}-2e^{2x_o}\cdot x_o)=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}e^{2x_o}-e^{2x_o}\cdot x_o-e^{2x_o}\cdot x_o+2e^{2x_o}\cdot x_o{}^2\right)=\frac{1}{2}\left(2e^{2x_o}\cdot x_o{}^2-2e^{2x_o}\cdot x_o+\frac{1}{2}e^{2x_o}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}2e^{2x_o}\left(x_o{}^2-x_o+\frac{1}{4}\right)=e^{2x_o}\left(x_o-\frac{1}{2}\right)^2$$

Έχουμε λοιπόν τη συνάρτηση $E(x)=e^{2x}\left(x-\frac{1}{2}\right)^2,\ \ x<\frac{1}{2}$

E(x) παραγωγίσιμη με

$$E'(x)=2e^{2x}\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+2e^{2x}\left(x-\frac{1}{2}\right)=2e^{2x}\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{1}{2}+1\right)=2e^{2x}\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x+\frac{1}{2}\right)$$

Ισχύει ότι $E'(x)=0\Rightarrow x=\frac{1}{2}\ ,\ x=-\frac{1}{2}$ και έχουμε το παρακάτω πινακάκι.

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
$E'(x)$	$+$	$-$	
$E(x)$	$\nearrow$	$\searrow$	

$E'(x)>0$ στο διάστημα $\left(-\infty,-\frac{1}{2}\right)$ και $E'(x)<0$ στο διάστημα $\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$. Άρα

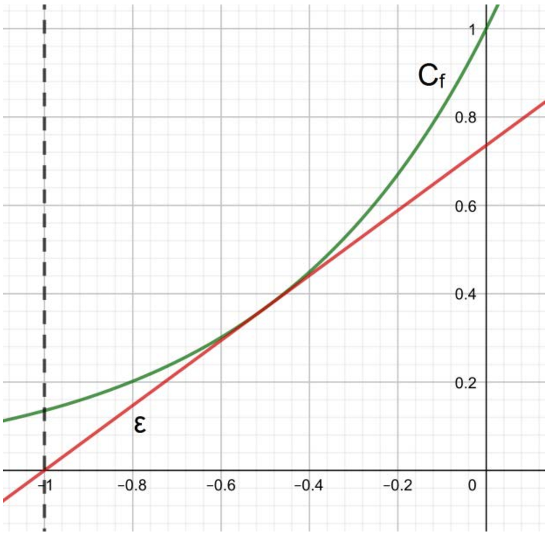
το εμβαδόν αυξάνεται στο διάστημα $(-\infty,-\frac{1}{2}]$ και μειώνεται στο διάστημα $[-\frac{1}{2},\frac{1}{2})$.

Επομένως το εμβαδόν μεγιστοποιείται για $x=-\frac{1}{2}$ και η εφαπτομένη διέρχεται από

το σημείο $\left(-\frac{1}{2},f\left(-\frac{1}{2}\right)\right)$ ή $\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{e}\right)$

Γ)Η εφαπτομένη στο $\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{e}\right)$ είναι:

$$\varepsilon : y-f\left(-\frac{1}{2}\right)=f'\left(-\frac{1}{2}\right)\left(x+\frac{1}{2}\right) \text{ ή}$$
$$y-\frac{1}{e}=\frac{2}{e}\left(x+\frac{1}{2}\right) \text{ ή}$$
$$y-\frac{1}{e}=\frac{2}{e}x+\frac{1}{e} \text{ ή}$$
$$y=\frac{2}{e}x+\frac{2}{e}$$



Η ε τέμνει τον x'x στο (-1,0), επομένως αν συμβολίσουμε με E_1 το εμβαδόν του χωρίου μεταξύ C_f ,x'x, y'y και ευθείας $x=-1$ και E_2 το εμβαδόν του χωρίου μεταξύ ευθείας ε, x'x, y'y και ευθείας $x=-1$, το ζητούμενο εμβαδόν Ε είναι ίσο με:

$$E=E_1-E_2$$

$$E_1=\int_{-1}^{0}|f(x)|dx \overset{(f(x)>0)}{=} \int_{-1}^{0}e^{2x}dx=\left[\frac{e^{2x}}{2}\right]_{-1}^{0}=\frac{1}{2}-\frac{e^{-2}}{2}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2e^2}=\frac{e^2-1}{2e^2}$$

$$E_2=\int_{-1}^{0}\left(\frac{2}{e}x+\frac{2}{e}\right)dx=\frac{2}{e}\left[\frac{x^2}{2}+x\right]_{-1}^{0}=-\frac{2}{e}\left(\frac{1}{2}-1\right)=\frac{1}{e}$$

Άρα $E=E_1-E_2=\frac{e^2-1}{2e^2}-\frac{1}{e}=\frac{e^2-1}{2e^2}-\frac{2e}{2e^2}=\frac{e^2-2e-1}{2e^2}$

Δ) Το όριο γίνεται:

$$A=\lim_{x\to-\frac{1}{2}}\frac{2\eta\mu\left(x+\frac{1}{2}\right)}{(2x+1)(ef(x)-2x-2)}=\lim_{x\to-\frac{1}{2}}\frac{\frac{2\eta\mu\left(x+\frac{1}{2}\right)}{2x+1}}{ef(x)-2x-2}=\lim_{x\to-\frac{1}{2}}\frac{\frac{\eta\mu\left(x+\frac{1}{2}\right)}{x+\frac{1}{2}}}{ef(x)-2x-2}=$$
$$=\lim_{x\to-\frac{1}{2}}\frac{\eta\mu\left(x+\frac{1}{2}\right)}{x+\frac{1}{2}}\cdot\frac{1}{ef(x)-2x-2}$$

- $\lim\limits_{x\to -\frac{1}{2}} \dfrac{ημ\left(x+\frac{1}{2}\right)}{x+\frac{1}{2}}$ θέτουμε $u = x + \frac{1}{2}$, $u \to 0$ και το όριο γίνεται:

  $\lim\limits_{u\to 0} \dfrac{ημu}{u} = 1$

- $\lim\limits_{x\to -\frac{1}{2}} \dfrac{1}{(ef(x)-2x-2)}$

  Έχουμε ότι $f''(x) = 4e^{2x} > 0$.Επομένως f κυρτή στο $\mathbb{R}$, άρα η εφαπτομένη της C_f στο $x_o = -\frac{1}{2}$,δηλαδή η ευθεία $ε: y = \frac{2}{e}x + \frac{2}{e}$ βρίσκεται κάτω από την C_f , με εξαίρεση το σημείο επαφής. Ισχύει λοιπόν ότι:

  $f(x) \geq \frac{2}{e}x + \frac{2}{e} \Leftrightarrow ef(x) \geq 2x+2 \Leftrightarrow ef(x) - 2x - 2 \geq 0$

  (η ισότητα ισχύει για $x = -\frac{1}{2}$)

  Επομένως:

  $\lim\limits_{x\to -\frac{1}{2}} (ef(x)-2x-2) = 0$ και $ef(x) - 2x - 2 \geq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$,δηλαδή

  $\lim\limits_{x\to -\frac{1}{2}} \dfrac{1}{(ef(x)-2x-2)} = +\infty$

  Το αρχικό όριο γίνεται:

  A= $= \lim\limits_{x\to -\frac{1}{2}} \dfrac{ημ\left(x+\frac{1}{2}\right)}{x+\frac{1}{2}} \cdot \dfrac{1}{ef(x)-2x-2} = 1\cdot(+\infty) = +\infty$