ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ Γ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΑΣΚΗΣΗ 1

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{\alpha\cdot x^2+\beta\cdot x-1}{x^2-1}$. Η γραφική παράσταση της f έχει οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$ την ευθεία $y=1$ και η εφαπτομένη της C_f στο σημείο της $M(2,f(2))$ έχει κλίση $-\dfrac{5}{9}$.

Α) Να δείξετε ότι $\alpha=\beta=1$

Β) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία.

Γ) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη κυρτότητα και τα σημεία καμπής.

Δ) Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $f(x)=0$

Ε) Να βρείτε τις υπόλοιπες ασύμπτωτες της C_f και να τη σχεδιάσετε

ΛΥΣΗ

Α) Η f έχει πεδίο ορισμού το $A=(-\infty,-1)\cup(-1,1)\cup(1,+\infty)$.

Αφού η $y=1$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$ θα ισχύει ότι $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=1$.

Αν $\alpha=0$, τότε $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\beta\cdot x-1}{x^2-1}=0$ για κάθε $\beta\in\mathbb{R}$.

Αν $\alpha\neq0$, τότε $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=1\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\alpha\cdot x^2+\beta\cdot x-1}{x^2-1}=1\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\alpha\cdot x^2}{x^2}=1\Leftrightarrow\alpha=1$

Για $\alpha=1$ είναι $f(x)=\dfrac{x^2+\beta\cdot x-1}{x^2-1}$ και για κάθε $x\in A$ έχουμε :

$$f'(x)=\frac{\left(x^2+\beta\cdot x-1\right)'\cdot\left(x^2-1\right)-\left(x^2+\beta\cdot x-1\right)\cdot\left(x^2-1\right)'}{\left(x^2-1\right)^2}=\frac{(2x+\beta)\left(x^2-1\right)-2x\cdot\left(x^2+\beta\cdot x-1\right)}{\left(x^2-1\right)^2}$$

Η κλίση της εφαπτομένης της C_f στο $M(2,f(2))$ είναι $-\dfrac{5}{9}$, άρα ισχύει ότι

$$f'(2) = -\frac{5}{9} \Leftrightarrow \frac{(4+\beta)\cdot 3 - 4\cdot(3+2\cdot\beta)}{9} = -\frac{5}{9} \Leftrightarrow 12+3\beta-12-8\cdot\beta = -5$$
$$\Leftrightarrow -5\cdot\beta = -5 \Leftrightarrow \beta = 1$$

Οπότε είναι $\alpha = \beta = 1$.

Β) Είναι $f(x) = \dfrac{x^2+x-1}{x^2-1}$, $x \in A$

Η f είναι συνεχής ως ρητή συνάρτηση. Επίσης, για κάθε $x \in A$ έχουμε :

$$f'(x) = \frac{(x^2+x-1)'\cdot(x^2-1)-(x^2+x-1)\cdot(x^2-1)'}{(x^2-1)^2} = \frac{(2x+1)(x^2-1)-2x\cdot(x^2+x-1)}{(x^2-1)^2}$$
$$= \frac{2x^3-2x+x^2-1-2x^3-2x^2+2x}{(x^2-1)^2} = \frac{-x^2-1}{(x^2-1)^2}$$

Παρατηρούμε ότι είναι $f'(x) < 0$ για κάθε $x \in A$, άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα σε κάθε ένα από τα διαστήματα $A_1 = (-\infty,-1)$, $A_2 = (-1,1)$ και $A_3 = (1,+\infty)$.

Γ) Η συνάρτηση f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο A με

$$f''(x) = \frac{(-x^2-1)'\cdot(x^2-1)^2 - \left((x^2-1)^2\right)'\cdot(-x^2-1)}{(x^2-1)^4}$$
$$= \frac{-2x\cdot(x^2-1)^2 - 2(x^2-1)\cdot 2x\cdot(-x^2-1)}{(x^2-1)^4}$$
$$= \frac{(x^2-1)\cdot\left[-2x\cdot(x^2-1)-4x\cdot(-x^2-1)\right]}{(x^2-1)^4}$$
$$= \frac{-2x^3+2x+4x^3+4x}{(x^2-1)^3} = \frac{2x^3+6x}{(x^2-1)^3} = \frac{2x\cdot(x^2+3)}{(x^2-1)^3}$$

Οπότε έχουμε

• $f''(x) = 0 \Leftrightarrow \dfrac{2x\cdot(x^2+3)}{(x^2-1)^3} = 0 \Leftrightarrow 2x\cdot(x^2+3) = 0 \Leftrightarrow x = 0$

Έχουμε λοιπόν τον παρακάτω πίνακα :

x	$-\infty$	-1	0	1 $\quad +\infty$
$2x$	$-$	$-$	$+$	$+$
x^2+3	$+$	$+$	$+$	$+$
$\left(x^2-1\right)^3$	$+$	$-$	$-$	$+$
$f''(x)$	$-$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	$\cap$	$\cup$	$\cap$	$\cup$

Οπότε η συνάρτηση f είναι :

● κυρτή στα διαστήματα $(-1,0]$ και $(1,+\infty)$

● κοίλη στα διαστήματα $(-\infty,-1)$ και $[0,1)$

Επίσης το σημείο $A(0,f(0))$ δηλαδή το σημείο $A(0,1)$ είναι σημείο καμπής της γραφικής παράστασης της f.

Δ) Η f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο $A_1=(-\infty,-1)$, άρα

$$f(A_1)=\left(\lim_{x\to -1^-} f(x), \lim_{x\to -\infty} f(x)\right)$$

• $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to -1^-}\left[\left(x^2+x-1\right)\cdot\dfrac{1}{x^2-1}\right]=(-1)\cdot(+\infty)=-\infty$, αφού :

► $\lim\limits_{x\to -1^-}\left(x^2+x-1\right)=-1$

► $\lim\limits_{x\to -1^-}\left(x^2-1\right)=0$ και $x^2-1>0$ στο $(-\infty,-1)$, άρα $\lim\limits_{x\to -1^-}\dfrac{1}{x^2-1}=+\infty$

• $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{x^2+x-1}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{x^2}{x^2}=1$

Οπότε $f(A_1)=(-\infty,1)$. Το $0\in f(A_1)$ και η f είναι γνησίως φθίνουσα στο A_1 , άρα υπάρχει μοναδικό $x_1\in A_1$ τέτοιο ώστε $f(x_1)=0$.

Η f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο $A_2=(-1,1)$, άρα

$$f(A_2)=\left(\lim_{x\to 1^-} f(x), \lim_{x\to -1^+} f(x)\right)$$

• $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}\left[\left(x^2+x-1\right)\cdot\dfrac{1}{x^2-1}\right]=1\cdot(-\infty)=-\infty$, αφού :

► $\lim\limits_{x\to 1^-}\left(x^2+x-1\right)=1$

► $\lim\limits_{x\to 1^-}\left(x^2-1\right)=0$ και $x^2-1<0$ στο $\left(-1,1\right)$, άρα $\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{1}{x^2-1}=-\infty$

- $\lim\limits_{x\to -1^+}f\left(x\right)=\lim\limits_{x\to -1^+}\left[\left(x^2+x-1\right)\cdot\dfrac{1}{x^2-1}\right]=\left(-1\right)\cdot\left(-\infty\right)=+\infty$, αφού :

► $\lim\limits_{x\to -1^+}\left(x^2+x-1\right)=-1$

► $\lim\limits_{x\to -1^+}\left(x^2-1\right)=0$ και $x^2-1<0$ στο $\left(-1,1\right)$, άρα $\lim\limits_{x\to -1^+}\dfrac{1}{x^2-1}=-\infty$

Οπότε $f\left(A_2\right)=\left(-\infty,+\infty\right)$. Το $0\in f\left(A_2\right)$ και η f είναι γνησίως φθίνουσα στο A_2 , άρα υπάρχει μοναδικό $x_2\in A_2$ τέτοιο ώστε $f\left(x_2\right)=0$

Η f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο $A_3=\left(1,+\infty\right)$, άρα

$$f\left(A_3\right)=\left(\lim_{x\to+\infty}f\left(x\right),\lim_{x\to 1^+}f\left(x\right)\right)$$

- $\lim\limits_{x\to 1^+}f\left(x\right)=\lim\limits_{x\to 1^+}\left[\left(x^2+x-1\right)\cdot\dfrac{1}{x^2-1}\right]=1\cdot\left(+\infty\right)=+\infty$, αφού :

► $\lim\limits_{x\to 1^+}\left(x^2+x-1\right)=1$

► $\lim\limits_{x\to 1^+}\left(x^2-1\right)=0$ και $x^2-1>0$ στο $\left(1,+\infty\right)$, άρα $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{1}{x^2-1}=+\infty$

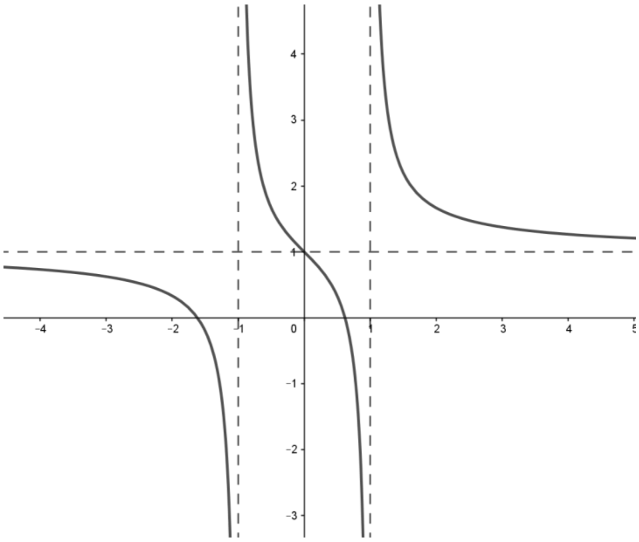
- $\lim\limits_{x\to+\infty}f\left(x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2+x-1}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2}{x^2}=1$

Οπότε $f\left(A_3\right)=\left(1,+\infty\right)$. Το $0\notin f\left(A_1\right)$ άρα δεν υπάρχει $x_3\in A_3$ τέτοιο ώστε $f\left(x_3\right)=0$.

Τελικά η εξίσωση $f\left(x\right)=0$ έχει ακριβώς δύο ρίζες.

Ε) Είναι $\lim\limits_{x\to-\infty}f\left(x\right)=1$, άρα η $y=1$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της C_f και στο $-\infty$.

Επίσης είναι $\lim\limits_{x\to-1^+}f\left(x\right)=+\infty$ και $\lim\limits_{x\to 1^+}f\left(x\right)=+\infty$, άρα οι ευθείες $x=-1$ και $x=1$ είναι κατακόρυφες ασύμπτωτες της C_f .



ΑΣΚΗΣΗ 2

Δίνεται συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν

- $f(x+y)=\big(f(x)-x\big)\cdot\big(f(y)-y\big)+x+y \quad (1)$ για κάθε $x,y\in\mathbb{R}$
- είναι συνεχής στο $x_0=0$
- $f(0)\neq 0$

Α) Να βρείτε το $f(0)$ και να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

Αν επιπλέον η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=0$ με $f'(0)=2$,τότε

Β) Να δείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$

Γ) Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f

Δ) Να αποδείξετε ότι $\int_1^2 \frac{f(x)}{x}\,dx > 2+\ln 2$

ΛΥΣΗ

Α) Από τη σχέση (1) για $x=y=0$ έχουμε

$$f(0)=f(0)\cdot f(0)\Leftrightarrow f^2(0)-f(0)=0\Leftrightarrow f(0)\big[f(0)-1\big]=0 \overset{f(0)\neq 0}{\Leftrightarrow} f(0)=1$$

Η f είναι συνεχής στο $x_0=0$, άρα $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=f(0)=1$.

Έστω τυχαίο $x_0\in\mathbb{R}$. Τότε έχουμε :

$$\lim_{x\to x_0} f(x) \overset{u=x-x_0}{=} \lim_{u\to 0} f(u+x_0) \overset{(1)}{=} \lim_{u\to 0}\left[\left(f(u)-u\right)\cdot\left(f(x_0)-x_0\right)+u+x_0\right]$$

$$=\left(f(x_0)-x_0\right)\cdot\lim_{u\to 0}\left[f(u)-u\right]+\lim_{u\to 0}\left(u+x_0\right)=\left(f(x_0)-x_0\right)\cdot\left(f(0)-0\right)+0+x_0$$

$$=\left(f(x_0)-x_0\right)\cdot 1+x_0=f(x_0)-x_0+x_0=f(x_0)$$

Άρα η f είναι συνεχής στο τυχαίο $x_0\in\mathbb{R}$ και επομένως θα είναι συνεχής σε όλο

το $\mathbb{R}$.

Β) Η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=0$ άρα $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-1}{x}=f'(0)=2$

Έστω $x_0\in\mathbb{R}$. Τότε:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}\overset{(1)}{=}\lim_{h\to 0}\frac{\left(f(x_0)-x_0\right)\left(f(h)-h\right)+x_0+h-f(x_0)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0)f(h)-hf(x_0)-x_0f(h)+x_0h+x_0+h-f(x_0)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\left[f(x_0)\cdot\frac{f(h)-1}{h}-x_0\cdot\frac{f(h)-1}{h}-\frac{h\left(f(x_0)-x_0-1\right)}{h}\right]$$

$$=f(x_0)\cdot f'(0)-x_0\cdot f'(0)-\left(f(x_0)-x_0-1\right)$$

$$=2f(x_0)-2x_0-f(x_0)+x_0+1$$

$$=f(x_0)-x_0+1\in\mathbb{R}$$

Άρα η f είναι παραγωγίσιμη στο τυχαίο $x_0\in\mathbb{R}$, και επομένως είναι παραγωγίσιμη και σε όλο το $\mathbb{R}$.

Γ) Από το Β ερώτημα έχουμε ότι $f'(x)=f(x)-x+1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Οπότε :

$$f'(x)=f(x)-x+1 \Leftrightarrow f'(x)-f(x)=1-x$$

$$\overset{\cdot e^{-x}}{\Leftrightarrow} e^{-x}f'(x)-e^{-x}f(x)=e^{-x}-xe^{-x}$$

$$\Leftrightarrow \left(e^{-x}f(x)\right)'=\left(xe^{-x}\right)'$$

$$\Leftrightarrow e^{-x}f(x)=xe^{-x}+c$$

$$\Leftrightarrow f(x)=x+c\cdot e^{x}$$

Είναι $f(0)=1\Leftrightarrow 0+c\cdot 1=1\Leftrightarrow c=1$.

Οπότε $f(x)=e^{x}+x$, $x\in\mathbb{R}$.

Δ) Είναι $f'(x)=e^{x}+1$ και $f''(x)=e^{x}>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Άρα η f είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$.

Η εφαπτομένη της C_f στο $x_0 = 0$ έχει εξίσωση :

$$y - f(0) = f'(0)(x - 0) \Leftrightarrow y - 1 = 2x \Leftrightarrow y = 2x + 1$$

και επειδή η f είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$ ισχύει ότι $f(x) \geq 2x + 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, με την ισότητα να ισχύει μόνο για $x = 0$.

Άρα για $x \in [1,2]$ έχουμε ότι :

$$f(x) > 2x + 1 \Leftrightarrow \frac{f(x)}{x} > 2 + \frac{1}{x}$$

Οπότε

$$\int_1^2 \frac{f(x)}{x}\,dx > \int_1^2 \left(2 + \frac{1}{x}\right)dx \Leftrightarrow \int_1^2 \frac{f(x)}{x}\,dx > \left[2x + \ln|x|\right]_1^2$$
$$\Leftrightarrow \int_1^2 \frac{f(x)}{x}\,dx > 4 + \ln 2 - 2$$
$$\Leftrightarrow \int_1^2 \frac{f(x)}{x}\,dx > 2 + \ln 2$$

<u>$2^{ος}$ τρόπος</u>

Για κάθε $x > 0$ ισχύει ότι $\ln x \leq x - 1$ με την ισότητα να ισχύει μόνο για $x = 1$.

Για $x \in \mathbb{R}$ είναι $e^x > 0$, άρα από τη παραπάνω σχέση παίρνουμε

$$\ln e^x \leq e^x - 1 \Leftrightarrow x \leq e^x - 1 \Leftrightarrow e^x \geq x + 1 \Leftrightarrow e^x + x \geq 2x + 1$$

Και για $x \in [1,2]$ προκύπτει ότι

$$\frac{e^x + x}{x} > 2 + \frac{1}{x} \Leftrightarrow \frac{f(x)}{x} > 2 + \frac{1}{x}$$

Οπότε

$$\int_1^2 \frac{f(x)}{x}\,dx > \int_1^2 \left(2 + \frac{1}{x}\right)dx \Leftrightarrow \int_1^2 \frac{f(x)}{x}\,dx > \left[2x + \ln|x|\right]_1^2$$
$$\Leftrightarrow \int_1^2 \frac{f(x)}{x}\,dx > 4 + \ln 2 - 2$$
$$\Leftrightarrow \int_1^2 \frac{f(x)}{x}\,dx > 2 + \ln 2$$