ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΕΠΑΛ

ΑΣΚΗΣΗ 1

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=-x^3+3x+5$, $x\in\mathbb{R}$.

Α) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

Β) Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων της γραφικής παράστασης της f που είναι παράλληλες στην ευθεία $\eta:\ y=3x+7$.

Γ) Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{f(x)-3}{x^2-4}$.

Δ) Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{x^2+3}-2}{\sqrt{f(x)+2x}-3}$.

ΛΥΣΗ

Α) Η συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ και είναι παραγωγίσιμη σε αυτό με

$f'(x)=-3x^2+3$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$

Έχουμε λοιπόν:

- $f'(x)=0 \Leftrightarrow -3x^2+3=0 \Leftrightarrow -3x^2=-3 \Leftrightarrow x^2=1 \Leftrightarrow x=1$ ή $x=-1$

- $f'(x)>0 \Leftrightarrow -3x^2+3>0 \Leftrightarrow -1<x<1$

- $f'(x)<0 \Leftrightarrow -3x^2+3<0 \Leftrightarrow x<-1$ ή $x>1$

Επομένως προκύπτει ο παρακάτω πίνακας

x	$-\infty$ -1	-1 1	1 $+\infty$
$f'(x)$	$-$	$+$	$-$
$f(x)$	$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$

Σύμφωνα με τον παραπάνω πίνακα προκύπτουν τα εξής :

- η f είναι γνησίως φθίνουσα στα διαστήματα $(-\infty,-1]$ και $[1,+\infty)$

● η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $\left[-1,1\right]$

● στο $x_1=-1$ παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο το $f\left(-1\right)=-\left(-1\right)^3+3\cdot\left(-1\right)+5=1-3+5=3$

● στο $x_2=1$ παρουσιάζει τοπικό μέγιστο το $f\left(1\right)=-1^3+3\cdot1+5=-1+3+5=7$

Β) Η εξίσωση της εφαπτομένης ε της C_f σε ένα τυχαίο σημείο της $M\left(x_0,f\left(x_0\right)\right)$ θα έχει εξίσωση $y=\lambda\cdot x+\beta$, όπου $\lambda=f'\left(x_0\right)$.

Είναι $\varepsilon//\eta\Leftrightarrow\lambda_\varepsilon=\lambda_\eta\Leftrightarrow\lambda=3\Leftrightarrow f'\left(x_0\right)=3\Leftrightarrow-3{x_0}^2+3=3\Leftrightarrow-3{x_0}^2=0\Leftrightarrow x_0=0$.

Άρα η ζητούμενη εφαπτομένη , είναι η εφαπτομένη της C_f στο σημείο της $M\left(0,f\left(0\right)\right)$.

Είναι $\lambda=f'\left(0\right)=3$ και $f\left(0\right)=-0^3+3\cdot0+5=5$, άρα $M\left(0,5\right)$.

$M\in\left(\varepsilon\right)\Leftrightarrow5=3\cdot0+\beta\Leftrightarrow\beta=5$.

Οπότε η ζητούμενη εφαπτομένη έχει εξίσωση $\varepsilon: y=3x+5$.

Γ) Έχουμε διαδοχικά

$$\lim_{x\to2}\frac{f\left(x\right)-3}{x^2-4}=\lim_{x\to2}\frac{-x^3+3x+5-3}{x^2-4}=\lim_{x\to2}\frac{-x^3+3x+2}{x^2-4}$$

Είναι $x^2-4=x^2-2^2=\left(x-2\right)\left(x+2\right)$.

Επίσης για το $-x^3+3x+2$ θα κάνουμε το σχήμα Horner

-1	0	3	2	2
	-2	-4	-2	
-1	-2	-1	0	

Επομένως είναι $-x^3+3x+2=\left(x-2\right)\left(-x^2-2x-1\right)$, άρα

$$\lim_{x\to2}\frac{-x^3+3x+2}{x^2-4}\lim_{x\to2}\frac{\cancel{\left(x-2\right)}\cdot\left(-x^2-2x-1\right)}{\cancel{\left(x-2\right)}\cdot\left(x+2\right)}=\lim_{x\to2}\frac{-x^2-2x-1}{x+2}=\frac{-2^2-2\cdot2-1}{2+2}=-\frac{9}{4}$$

Δ) Έχουμε διαδοχικά

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x^2+3}-2}{\sqrt{f(x)+2x}-3}=\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x^2+3}-2}{\sqrt{-x^3+3x+5+2x}-3}=\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x^2+3}-2}{\sqrt{-x^3+5x+5}-3}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{\left(\sqrt{x^2+3}-2\right)\left(\sqrt{x^2+3}+2\right)\left(\sqrt{-x^3+5x+5}+3\right)}{\left(\sqrt{-x^3+5x+5}-3\right)\left(\sqrt{-x^3+5x+5}+3\right)\left(\sqrt{x^2+3}+2\right)}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{\left(\sqrt{x^2+3}^{\,2}-2^2\right)\left(\sqrt{-x^3+5x+5}+3\right)}{\left(\sqrt{-x^3+5x+5}^{\,2}-3^2\right)\left(\sqrt{x^2+3}+2\right)}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{\left(x^2+3-4\right)\left(\sqrt{-x^3+5x+5}+3\right)}{\left(-x^3+5x+5-9\right)\left(\sqrt{x^2+3}+2\right)}=\lim_{x\to 1}\frac{\left(x^2-1\right)\left(\sqrt{-x^3+5x+5}+3\right)}{\left(-x^3+5x-4\right)\left(\sqrt{x^2+3}+2\right)}$$

Είναι $x^2-1=x^2-1^2=(x-1)(x+1)$.

Για το $-x^3+5x-4$ θα κάνουμε σχήμα Horner .

-1	0	5	-4	1
	-1	-1	4	
-1	-1	4	0	

Οπότε είναι $-x^3+5x-4=(x-1)\left(-x^2-x+4\right)$, άρα

$$\lim_{x\to 1}\frac{\left(x^2-1\right)\left(\sqrt{-x^3+5x+5}+3\right)}{\left(-x^3+5x-4\right)\left(\sqrt{x^2+3}+2\right)}=\lim_{x\to 1}\frac{\cancel{(x-1)}\,(x+1)\left(\sqrt{-x^3+5x+5}+3\right)}{\cancel{(x-1)}\,\left(-x^2-x+4\right)\left(\sqrt{x^2+3}+2\right)}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{(x+1)\left(\sqrt{-x^3+5x+5}+3\right)}{\left(-x^2-x+4\right)\left(\sqrt{x^2+3}+2\right)}$$

$$=\frac{(1+1)\left(\sqrt{-1^3+5\cdot 1+5}+3\right)}{\left(-1^2-1+4\right)\left(\sqrt{1^2+3}+2\right)}=\frac{\cancel{2}\cdot\left(\sqrt{9}+3\right)}{\cancel{2}\cdot\left(\sqrt{4}+2\right)}=\frac{6}{4}=\frac{3}{2}$$

ΑΣΚΗΣΗ 2

Δίνεται ο παρακάτω ελλιπής πίνακας

Κλάσεις	Κεντρική τιμή x_i	v_i	$f_i\%$	$F_i\%$	$x_i \cdot v_i$
$[\ ,\ )$		4			
$[\ ,\ )$	4	$2\alpha+4$			
$[\ ,\ )$		$5\alpha+1$			
$[7,\ )$		2			
$[\ ,\ )$		$\alpha+5$			
Σύνολο		40			

Α) Να αποδείξετε ότι $\alpha = 3$.

Β) Να συμπληρώσετε τον πίνακα και να βρείτε τη μέση τιμή.

Γ) Να βρείτε τη διάμεσο των παρατηρήσεων κατά προσέγγιση

Δ) Να εξετάσετε αν το δείγμα είναι ομοιογενές.

ΛΥΣΗ

Α) Είναι

$$\begin{aligned} v_1+v_2+v_3+v_4+v_5 = v &\Leftrightarrow 4+(2\alpha+4)+(5\alpha+1)+2+(\alpha+5)=40 \\ &\Leftrightarrow 4+2\alpha+4+5\alpha+1+2+\alpha+5=40 \\ &\Leftrightarrow 8\alpha+16=40 \\ &\Leftrightarrow 8\alpha=40-16 \\ &\Leftrightarrow 8\alpha=24 \\ &\Leftrightarrow \alpha=3 \end{aligned}$$

Β) Έστω β το αριστερό όριο της $1^{ης}$ κλάσης και c το πλάτος των κλάσεων.

Τότε έχουμε

Κλάσεις	Κεντρική Τιμή x_i
$[\beta, \beta+c)$	$\frac{\beta+\beta+c}{2}=\frac{2\beta+c}{2}$
$[\beta+c, \beta+2c)$	$\frac{\beta+c+\beta+2c}{2}=\frac{2\beta+3c}{2}$
$[\beta+2c, \beta+3c)$	$\frac{\beta+2c+\beta+3c}{2}=\frac{2\beta+5c}{2}$
$[\beta+3c, \beta+4c)$	$\frac{\beta+3c+\beta+4c}{2}=\frac{2\beta+7c}{2}$
$[\beta+4c, \beta+5c)$	$\frac{\beta+4c+\beta+5c}{2}=\frac{2\beta+9c}{2}$

Οπότε έχουμε

- $x_2=4 \Leftrightarrow \frac{2\beta+3c}{2}=4 \Leftrightarrow 2\beta+3c=8 \quad (1)$
- $\beta+3c=7 \Leftrightarrow \beta=7-3c \quad (2)$

Η (1) λόγω της (2) γίνεται

$2(7-3c)+3c=8 \Leftrightarrow 14-6c+3c=8 \Leftrightarrow -3c=8-14 \Leftrightarrow -3c=-6 \Leftrightarrow c=2$

Οπότε από τη (2) παίρνουμε $\beta=7-3\cdot 2=7-6=1$

Άρα έχουμε

Κλάσεις	Κεντρική τιμή x_i	v_i	$f_i\%$	$F_i\%$	$x_i \cdot v_i$
$[1, 3)$	2	4			
$[3, 5)$	4	10			
$[5, 7)$	6	16			
$[7, 9)$	8	2			
$[9, 11)$	10	8			
Σύνολο		40			

Είναι

$$f_1=\frac{\nu_1}{\nu}=\frac{4}{40}=\frac{1}{10}=0,10 \;\Rightarrow f_1\%=10$$
$$f_2=\frac{\nu_2}{\nu}=\frac{10}{40}=\frac{1}{4}=\frac{25}{100}=0,25 \;\Rightarrow f_2\%=25$$
$$f_3=\frac{\nu_3}{\nu}=\frac{16}{40}=\frac{4}{10}=0,40 \;\Rightarrow f_3\%=40$$
$$f_4=\frac{\nu_4}{\nu}=\frac{2}{40}=\frac{1}{20}=\frac{5}{100}=0,05 \;\Rightarrow f_4\%=5$$
$$f_5=\frac{\nu_5}{\nu}=\frac{8}{40}=\frac{2}{10}=0,20 \;\Rightarrow f_5\%=20$$

Τελικά ο πίνακας συμπληρωμένος είναι

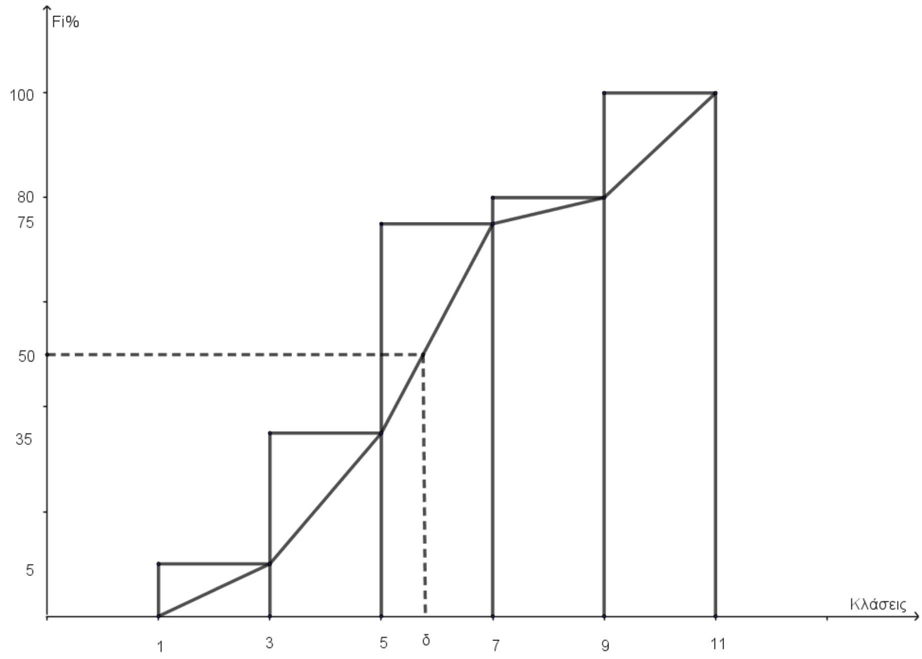
Κλάσεις	Κεντρική τιμή x_i	ν_i	$f_i\%$	$F_i\%$	$x_i\cdot\nu_i$
$[1,3)$	2	4	10	10	8
$[3,5)$	4	10	25	35	40
$[5,7)$	6	16	40	75	96
$[7,9)$	8	2	5	80	16
$[9,11)$	10	8	20	100	80
Σύνολο		40	100		240

Για τη μέση τιμή έχουμε

$$\bar{x}=\frac{1}{40}\cdot\sum_{i=1}^{5}x_i\cdot\nu_i=\frac{240}{40}=6$$

Γ) Για τη διάμεσο θα χρειαστούμε το πολύγωνο αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων επί τοις εκατό.

Οπότε έχουμε



Οπότε είναι $\delta \simeq 5{,}75$.

Δ) Είναι

$$s^2 = \frac{1}{40}\cdot\sum_{i=1}^{5}\left(x_i-\bar{x}\right)^2\cdot\nu_i = \frac{(2-6)^2\cdot 4+(4-6)^2\cdot 10+(6-6)^2\cdot 16+(8-6)^2\cdot 2+(10-6)^2\cdot 8}{40}$$

$$= \frac{64+40+0+8+128}{40} = \frac{240}{40} = 6$$

Οπότε $s=\sqrt{s^2}=\sqrt{6}$ και $CV=\frac{s}{\bar{x}}=\frac{\sqrt{6}}{6}=\frac{1}{\sqrt{6}}>\frac{1}{10}$, άρα $CV>10\%$ και επομένως το δείγμα δεν είναι ομοιογενές.