ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΕΠΑΛ

ΑΣΚΗΣΗ 1

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x+\frac{1}{x}$, $x\in\mathbb{R}^*$.

Α) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

Β) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης (ε) της γραφικής παράστασης της f στο $x_o=2$.

Γ) Δίνονται τα σημεία $A_1,A_2,...,A_8$ της (ε) που έχουν τετμημένες $x_1,x_2,...,x_8$ με μέση τιμή $\overline{x}=\lim\limits_{x\to1}\frac{6\cdot f'(x)}{x^3-1}$ και τυπική απόκλιση $s=f''(1)$.

i) Να βρείτε την μέση τιμή και την τυπική απόκλιση των τετμημένων των σημείων $A_1,A_2,...,A_8$.

ii) Να υπολογίσετε το συντελεστή μεταβολής των τεταγμένων των σημείων $A_1,A_2,...,A_8$.

iii) Έστω ότι $0<x_1<x_2<...<x_8<1$. Αν ισχύουν $x_8\cdot x_1=\frac{1}{2}$ και $x_8-x_1=4$ να υπολογίσετε το εύρος των $f(x_1),f(x_2),...,f(x_8)$.

ΛΥΣΗ

Α) Η συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}^*$ και είναι παραγωγίσιμη σε αυτό με

$$f'(x)=1-\frac{1}{x^2}=\frac{x^2-1}{x^2}=\frac{(x-1)(x+1)}{x^2}$$

Έχουμε λοιπόν:

• $f'(x)=0\Leftrightarrow\frac{(x-1)(x+1)}{x^2}=0\Leftrightarrow(x-1)(x+1)=0\Leftrightarrow$
$x=1$ ή $x=-1$

Επομένως προκύπτει ο παρακάτω πίνακας

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
x^2-1	$+$	0 $-$	‖ $-$	0 $+$	
x^2	$+$	$+$	‖ $+$	$+$	
f'	$+$	$-$	‖ $-$	$+$	
f	↗	↘	‖ ↘	↗	

Σύμφωνα με τον παραπάνω πίνακα προκύπτουν τα εξής :

- η f είναι γνησίως φθίνουσα στα διαστήματα $\left[-1,0\right)$ και $\left(0,1\right]$
- η f είναι γνησίως αύξουσα στα διαστήματα $\left(-\infty,-1\right]$ και $\left[1,+\infty\right)$
- στο $x_1=1$ παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο το $f\left(1\right)=2$
- στο $x_2=-1$ παρουσιάζει τοπικό μέγιστο το $f\left(-1\right)=-2$

Β) Η εξίσωση της εφαπτομένης ε της C_f στο σημείο της $M\left(2,f\left(2\right)\right)$ θα έχει εξίσωση $y=\lambda\cdot x+\beta$, όπου $\lambda=f'\left(2\right)$.

Είναι $\lambda=f'\left(2\right)=1-\dfrac{1}{2^2}=1-\dfrac{1}{4}=\dfrac{3}{4}$ και

$f\left(2\right)=2+\dfrac{1}{2}=\dfrac{5}{2}$, άρα $M\left(2,\dfrac{5}{2}\right)$.

$M\in\left(\varepsilon\right)\Leftrightarrow\dfrac{5}{2}=\dfrac{3}{4}\cdot 2+\beta\Leftrightarrow\beta=1$.

Οπότε η ζητούμενη εφαπτομένη έχει εξίσωση $\varepsilon: y=\dfrac{3}{4}x+1$.

Γ) i) Έχουμε :

$$\bar{x}=\lim_{x\to 1}\frac{6\cdot f'(x)}{x^3-1}=6\cdot\lim_{x\to 1}\frac{\frac{x^2-1}{x^2}}{x^3-1}=$$

$$6\cdot\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x^2\cdot(x-1)(x^2+x+1)}=6\cdot\lim_{x\to 1}\frac{(x+1)(x-1)}{x^2\cdot(x-1)(x^2+x+1)}=$$

$$6\cdot\lim_{x\to 1}\frac{x+1}{x^2\cdot(x^2+x+1)}=6\cdot\frac{2}{3}=4$$

Η συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}^*$ και είναι παραγωγίσιμη σε αυτό με

$$f''(x)=\left(\frac{x^2-1}{x^2}\right)'=\frac{(x^2-1)'x^2-(x^2-1)\cdot(x^2)'}{x^4}=$$

$$=\frac{2x\cdot x^2-2x\cdot(x^2-1)}{x^4}=\frac{2x^3-2x^3+2x}{x^4}=\frac{2}{x^3}.$$

Άρα $s=f''(1)=2$

ii) Αφού τα σημεία $A_1(x_1,y_1),A_2(x_2,y_2),\ldots,A_8(x_8,y_8)$ είναι σημεία της $(\varepsilon): y=\frac{3}{4}x+1$,τότε θα επαληθεύουν την εξίσωσή της, άρα θα είναι της μορφής $y_i=\frac{3}{4}x+1$ με $i=1,2\ldots,8$.

Επομένως έχουμε η μέση τιμή θα είναι: $\bar{y}=\frac{3}{4}\bar{x}+1=\frac{3}{4}\cdot 4+1=4$

και η τυπική απόκλιση : $s_y=\left|\frac{3}{4}\right|s_x=\frac{3}{4}\cdot 2=\frac{3}{2}$.

Επομένως ο συντελεστής μεταβολής των τεταγμένων θα είναι:

$$CV_y\%=\frac{s_y}{|\bar{y}|}\cdot 100=\frac{\frac{3}{2}}{4}\cdot 100=37{,}5\%$$

iii) Στο διάστημα $(0,1]$ η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα.

Επομένως προκύπτει:

$$x_1 < x_2 < \dots < x_8 \overset{f\downarrow}{\Rightarrow} f(x_1) > f(x_2) > \dots > f(x_8)\ .$$

Επομένως το εύρος R θα είναι :

$$R = f(x_1) - f(x_8) = x_1 + \frac{1}{x_1} - x_8 - \frac{1}{x_8} =$$

$$= (x_1 - x_8) + \frac{x_8 - x_1}{x_1 \cdot x_8} = -4 + \frac{4}{\frac{1}{2}} = -4 + 8 = 4$$

Άσκηση 2

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = -x^3 + 6x^2 - 9x + 1$.

Έστω ότι $f'(0)$,7 ,$f'(1)+2$,$f(-1)$,-2 είναι οι παρατηρήσεις μιας μεταβλητής X ενός δείγματος .

Α) Να υπολογίσετε τη μέση τιμή ,τη διάμεσο και τη διακύμανση.

Β) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $M\left(\frac{R}{13}, f\left(\frac{R}{13}\right)\right)$

Γ) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και να βρείτε το είδος και την τιμή των ακροτάτων.

Δ) Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x \to 2} \frac{f'(x) - f''(x) - 3}{\sqrt{x^2 + 5} - 3}$.

Ε) Σε ποιο σημείο της γραφικής παράστασης της f η εφαπτομένη έχει το μέγιστο συντελεστή διεύθυνσης.

Λύση

Α) Η f παραγωγίσιμη με $f'(x)=-3x^2+12x-9$

Για τις παρατηρήσεις του δείγματος έχουμε:

•$f'(0)=-9$

•$f'(1)+2=-3\cdot 1^2+12\cdot 1-9+2=2$

•$f(-1)=-(-1)^3+6(-1)^2-9\cdot(-1)+1=17$

Τοποθετούμε τις παρατηρήσεις σε αύξουσα σειρά: $-9,-2,2,7,17$

• Η μέση τιμή είναι: $\bar{x}=\dfrac{\sum_{i=1}^{5}t_i}{\nu}\dfrac{-9-2+2+7+17}{5}=\dfrac{15}{5}=3$

• Επειδή το πλήθος το παρατηρήσεων είναι 5, περιττός αριθμός ,τότε η διάμεσος ισούται με τη μεσαία παρατήρηση ,άρα $\delta=2$.

$$\bullet s^2=\frac{\sum_{i=1}^{5}\left(t_i-\bar{x}\right)^2}{\nu}=\frac{(-9-3)^2+(-2-3)^2+(2-3)^2+(7-3)^2+(17-3)^2}{5}=$$

$$=\frac{144+25+1+16+196}{5}=76,4$$

Β) Το εύρος των παρατηρήσεων είναι : $R=17-(-9)=26$.

Επομένως $M\left(\dfrac{R}{13},f\left(\dfrac{R}{13}\right)\right)$ή $M(2,f(2))$ή $M(2,-1)$

Έστω $(\varepsilon): y=\lambda x+\beta$ η εφαπτομένη της C_f .

Έχουμε $\lambda=f'(2)=3$.Άρα $(\varepsilon): y=3x+\beta$.

$M(2,-1)\in(\varepsilon)$ άρα έχουμε $-1=6+\beta\Rightarrow\beta=-7$.

Τελικά $(\varepsilon): y=3x-7$.

Γ) Έχουμε $A=\mathbb{R}$ και η f παραγωγίσιμη με $f'(x)=-3x^2+12x-9$

$f'(x)=0\Leftrightarrow -3x^2+12x-9=0\Leftrightarrow -x^2+4x-3=0$.

$$\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=(-4)^2-4(-1)(-3)=16-12=4$$

$$x_1,x_2=\frac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\alpha}=\frac{-4\pm2}{-2}=\begin{cases}x_1=3\\x_2=1\end{cases}$$

Έχουμε λοιπόν το πινακάκι:

x	$-\infty$	1	3	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	$+$	$-$	
$f(x)$	↘	↗	↘	

Η f είναι:

- γνησίως φθίνουσα στα διαστήματα $(-\infty,1]$ και $[3,+\infty)$
- γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[1,3]$

Η f παρουσιάζει:

- τοπικό μέγιστο στη θέση $x=3$ το $f(3)=1$
- τοπικό ελάχιστο στη θέση $x=1$ το $f(1)=-3$

Δ) Η f' παραγωγίσιμη με $f''(x)=-6x+12$.

Επομένως έχουμε:

$$\lim_{x\to2}\frac{f'(x)-f''(x)-3}{\sqrt{x^2+5}-3}=\lim_{x\to2}\frac{-3x^2+12x-9+6x-12-3}{\sqrt{x^2+5}-3}=$$

$$\lim_{x\to2}\frac{-3x^2+18x-24}{\sqrt{x^2+5}-3}=\lim_{x\to2}\frac{-3(x-2)(x-4)}{\sqrt{x^2+5}-3}=$$

$$\lim_{x\to2}\frac{-3(x-2)(x-4)\left(\sqrt{x^2+5}+3\right)}{\left(\sqrt{x^2+5}-3\right)\left(\sqrt{x^2+5}+3\right)}=\lim_{x\to2}\frac{-3(x-2)(x-4)\left(\sqrt{x^2+5}+3\right)}{x^2+5-3^2}=$$

$$\lim_{x\to2}\frac{-3(x-2)(x-4)\left(\sqrt{x^2+5}+3\right)}{(x-2)(x+2)}=\lim_{x\to2}\frac{-3(x-4)\left(\sqrt{x^2+5}+3\right)}{x+2}=9$$

Ε) Ο συντελεστής διεύθυνσης της καμπύλης της συνάρτησης f σε ένα σημείο της $(x, f(x))$ είναι $\lambda = f'(x) = -3x^2 + 12x - 9$.

Ζητάμε τις τιμές του x για τις οποίες η συνάρτηση

$f'(x) = -3x^2 + 12x - 9$, $x \in \mathbb{R}$ έχει μέγιστο.

Για $x \in \mathbb{R}$ έχουμε $f''(x) = -6x + 12$.

$f''(x) = 0 \Leftrightarrow -6x + 12 = 0 \Leftrightarrow x = 2$

x	$-\infty \qquad\qquad 2$	$\qquad +\infty$
$f''(x)$	$+$	$-$
$f'(x)$	$\nearrow$	$\searrow$

Επομένως το σημείο θα είναι το $(2, f(2))$ή$(2, -1)$