Άσκηση 1

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 - 15\frac{x^2}{2} + 18x + 4$

Α)Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και να βρείτε το είδος και την τιμή των ακροτάτων της.

Στον παρακάτω ελλιπή πίνακα έχουν ομαδοποιηθεί σε 5 κλάσεις ίσου πλάτους, οι ηλικίες 20 υπαλλήλων μιας επιχείρησης.

Ηλικίες	Κ. τιμή x_i	v_i	f_i	N_i	F_i	$f_{i\%}$	$F_{i\%}$
[α,...)		1					
[...,...)		6			0,35		
[...,...)			0,40				
[...,...)				18			
[2β-1,...]							
Σύνολο							

Αν γνωρίζετε επιπλέον ότι η παράμετρος α είναι ίση με την τιμή του τοπικού μεγίστου της f και η παράμετρος β είναι ίση με την τιμή του τοπικού ελαχίστου της f, τότε:

Β)Να αποδείξετε ότι το πλάτος c των κλάσεων είναι ίσο με 4.

Γ)Να συμπληρώσετε τον πίνακα.

Δ)Να βρείτε πόσοι υπάλληλοι είναι το πολύ 28 ετών.

Ε)Να κατασκευάσετε ιστόγραμμα και πολύγωνο αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων επί τοις εκατό και να βρείτε το ποσοστό των υπαλλήλων που είναι τουλάχιστον 29 ετών.

Λύση

Α) Έχουμε $A = \mathbb{R}$ και f παραγωγίσιμη με $f'(x) = 3x^2 - 15x + 18$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 15x + 18 = 0$. Οι λύσεις της εξίσωσης είναι $x_1 = 2$ και $x_2 = 3$.

Έχουμε λοιπόν το πινακάκι:

x	$-\infty$ 2	3	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$

Η f είναι:

- γνησίως αύξουσα στα διαστήματα $(-\infty,2]$ και $[3,+\infty)$
- γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[2,3]$

Η f παρουσιάζει:

- τοπικό μέγιστο στη θέση $x=2$ το $f(2)=18$
- τοπικό ελάχιστο στη θέση $x=3$ το $f(3)=\frac{35}{2}$

Β)Έχουμε ότι α = 18 και $\beta=\frac{35}{2}$, άρα οι κλάσεις γίνονται:

$[18,18+c)$, $[18+c,18+2c)$, $[18+2c,18+3c)$, $[18+3c,18+4c)$, $[18+4c,18+5c]$

Επομένως $18+4c=2\beta-1 \Leftrightarrow 18+4c=34 \Leftrightarrow c=4$

Γ)Με τη βοήθεια του πλάτους c = 4, συμπληρώνουμε τις κλάσεις και τη στήλη με τις κεντρικές τιμές.

<u>Εύρεση συνόλου ν:</u> Έχουμε $N_2=7$ και $F_2=0,35$ άρα $v=\frac{N_2}{F_2}=\frac{7}{0,35}=20$

- $v_2=f_2\cdot v=0,40\cdot 20=8$
- $v_4=N_4-(v_1+v_2+v_3)=18-15=3$
- $v_5=v-N_4=20-18=2$

Έχουμε το σύνολο των υπαλλήλων ν και όλες τις συχνότητες v_i. Συμπληρώνουμε και τη στήλη των σχετικών συχνοτήτων.

- $f_1=\frac{v_1}{v}=\frac{1}{20}=\frac{5}{100}=0,05$
- $f_2=\frac{v_2}{v}=\frac{6}{20}=\frac{30}{100}=0,30$
- $f_3=\frac{v_3}{v}=\frac{8}{20}=\frac{40}{100}=0,40$
- $f_4=\frac{v_4}{v}=\frac{3}{20}=\frac{15}{100}=0,15$
- $f_5=\frac{v_2}{v}=\frac{2}{20}=\frac{10}{100}=0,10$

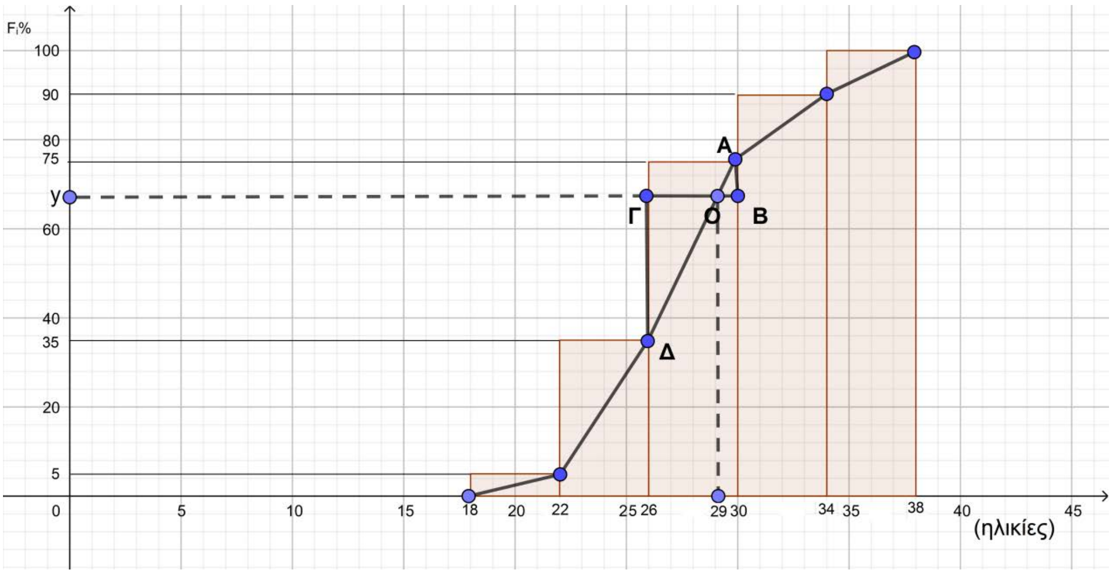
Εύκολα πλέον συμπληρώνουμε και τις υπόλοιπες θέσεις του πίνακα.

Ηλικίες	Κ. τιμή x_i	v_i	f_i	N_i	F_i	$f_{i\%}$	$F_{i\%}$
[18,22)	20	1	0,05	1	0,05	5	5
[22,26)	24	6	0,30	7	0,35	30	35
[26,30)	28	8	0,40	15	0,75	40	75
[30,34)	32	3	0,15	18	0,90	15	90
[34,38]	36	2	0,10	20	1	10	100
Σύνολο		20	1			100	

Δ)Αφού το 28 είναι το κέντρο της κλάσης [26,30) ,οι μισοί υπάλληλοι της κλάσης θα ανήκουν στο διάστημα [26,28).Επομένως το πλήθος των υπαλλήλων που είναι το πολύ 28 ετών είναι ίσο με :

$$v_1 + v_2 + \frac{v_3}{2} = 1 + 6 + 4 = 11$$

Ε)Οι υπάλληλοι που είναι 29 ετών ανήκουν στην κλάση [26,30). Πρέπει να βρούμε την τεταγμένη y του σημείου Ο που έχει τετμημένη 29.



Τα τρίγωνα ΟΑΒ και ΟΓΔ είναι όμοια , αφού είναι ορθογώνια και έχουν ίσες δυο οξείες τους γωνίες ως κατακορυφήν. Ισχύει λοιπόν:

$$\frac{ΟΓ}{ΟΒ} = \frac{ΓΔ}{ΑΒ} \Leftrightarrow \frac{3}{1} = \frac{y-35}{75-y} \Leftrightarrow 3(75-y) = y-35 \Leftrightarrow 4y = 260 \Leftrightarrow y = 65$$

Επομένως το ποσοστό των υπαλλήλων που είναι τουλάχιστον 29 ετών είναι 35%.

Άσκηση 2

Η μέση τιμή και οι διάμεσος πέντε αριθμών είναι 4. Τρεις απ' αυτούς τους αριθμούς είναι 0, 6, 7.

Α)Να βρείτε τους άλλους δυο αριθμούς.

Αν οι άλλοι δυο αριθμοί είναι το 3 και το 4

Β)Να υπολογίσετε την τυπική απόκλιση του παραπάνω δείγματος.

Γ)Να εξετάσετε αν το δείγμα είναι ομοιογενές.

Δ)Αν οι παραπάνω αριθμοί αντιστοιχούν στις τετμημένες σημείων που επαληθεύουν την ευθεία $y = 2x + 2$,να βρείτε το συντελεστή μεταβολής των τεταγμένων των σημείων.

(Δίνεται ότι $\sqrt{6} \simeq 2{,}5$)

Λύση

Α) Έστω ότι οι άλλοι δυο αριθμοί που αναζητούμε είναι οι α, β. Έχουμε λοιπόν ότι:

$$\bar{x} = \frac{0+6+7+\alpha+\beta}{5} \Leftrightarrow 4 = \frac{13+\alpha+\beta}{5} \Leftrightarrow 20 = 13+\alpha+\beta \Leftrightarrow \alpha+\beta = 7(1)$$

Επιπλέον παρατηρούμε ότι το πλήθος των αριθμών είναι 5(περιττός), επομένως η διάμεσος είναι ένα από τους αριθμούς. Όμως κανένας από τους αριθμούς δεν είναι ίσος με 4, άρα θα είναι σίγουρα ένας από τους α και β. Έστω ότι α = 4, επομένως από (1) έχουμε ότι β = 3.

Οι αριθμοί λοιπόν είναι: 0, 3, 4, 6, 7

Β) Αρχικά υπολογίζουμε τη διασπορά του δείγματος.

$$s^2 = \frac{1}{5}\sum_{i=1}^{5}(x_i - \bar{x})^2 = \frac{(0-4)^2+(3-4)^2+(4-4)^2+(6-4)^2+(7-4)^2}{5} = \frac{16+1+0+4+9}{5} = \frac{30}{5} = 6$$

Άρα $s = \sqrt{s^2} = \sqrt{6} \simeq 2{,}5$

Γ) Ισχύει ότι $CV = \frac{s}{|\bar{x}|} = \frac{2{,}5}{4} = 0{,}625$,επομένως $CV\% = 62{,}5\% > 10\%$, άρα το δείγμα των αριθμών δεν είναι ομοιογενές.

Δ)Έχουμε ότι το δείγμα των τεταγμένων δίνεται από τη σχέση $y_i = 2x_i + 2$.

Για τη μέση τιμή των τεταγμένων ισχύει: $\bar{y} = 2\bar{x} + 2 = 2 \cdot 4 + 2 = 10$

Για την τυπική απόκλιση των τεταγμένων ισχύει: $s_y = |2| \cdot s_x = 2 \cdot 2{,}5 = 5$

Επομένως $CV_y = \frac{s_y}{|\bar{y}|} = \frac{5}{10} = 0{,}5$ επομένως $CV_y\% = 50\%$

Άσκηση 3

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\alpha x^3+\frac{\beta x^2}{2}-30x+2$. Αν γνωρίζετε ότι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο επαφής το A(2,-32), είναι παράλληλη στον x'x, τότε:

Α) Να αποδείξετε ότι α = 1 και β = 9.

Β)Να μελετήσετε συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

Γ)Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x\to 2}\frac{f'(x)-x^2+6x-8}{\sqrt{x^2-3}-\sqrt{5x-9}}$.

Δ)Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $g(x)=\frac{2x-1}{\sqrt{f'(x)}+\sqrt{5}}$.

Λύση

Α) Για $x\in\mathbb{R}$ έχουμε η f είναι παραγωγίσιμη με $f'(x)=3\alpha x^2+\beta x-30$.

Αφού η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το σημείο A(2,-32) ισχύει:

$$\begin{gathered}f(2)=-32\Leftrightarrow\\ 8\alpha+2\beta-60+2=-32\Leftrightarrow\\ 8\alpha+2\beta=26\Leftrightarrow\\ 4\alpha+\beta=13\ \ (1)\end{gathered}$$

Επιπλέον η εφαπτομένη στο Α είναι παράλληλη στον x'x, άρα

$$\begin{gathered}f'(2)=0\Leftrightarrow\\ 12\alpha+2\beta-30=0\Leftrightarrow\\ 12\alpha+2\beta=30\Leftrightarrow\\ 6\alpha+\beta=15\ \ (2)\end{gathered}$$

Λύνουμε λοιπόν το σύστημα των σχέσεων (1) και (2):

$$\begin{cases}4\alpha+\beta=13\\ 6\alpha+\beta=15\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}4\alpha+\beta=13\\ -6\alpha-\beta=-15\end{cases}$$

προσθέτοντας κατά μέλη τις δυο τελευταίες σχέσεις προκύπτει:

$-2\alpha=-2\Leftrightarrow\alpha=1$ και $\beta=9$

Έχουμε λοιπόν $f(x)=x^3+\frac{9x^2}{2}-30x+2$ και $f'(x)=3x^2+9x-30$, $x\in\mathbb{R}$

Β)

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow$$
$$3x^2+9x-30=0 \Leftrightarrow$$
$$x^2+3x-10=0$$

$$\Delta=49 \text{ και } x_1=-5,\ x_2=2$$

Έχουμε λοιπόν το πινακάκι:

x	$-\infty$	-5	2	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$	
$f(x)$	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$	

Η f είναι:

- γνησίως αύξουσα στα διαστήματα $(-\infty,-5]$ και $[2,+\infty)$
- γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[-5,2]$

Η f παρουσιάζει:

- τοπικό μέγιστο στη θέση $x=-5$ το $f(-5)=\frac{279}{2}$
- τοπικό ελάχιστο στη θέση $x=2$ το $f(2)=-32$

Γ)Έχουμε διαδοχικά:

$$\lim_{x\to2}\frac{f'(x)-x^2+6x-8}{\sqrt{x^2-3}-\sqrt{5x-9}}=\lim_{x\to2}\frac{3x^2+9x-30-x^2+6x-8}{\sqrt{x^2-3}-\sqrt{5x-9}}=\lim_{x\to2}\frac{2x^2+15x-38}{\sqrt{x^2-3}-\sqrt{5x-9}}$$

Για το $2x^2+15x-38$ θα κάνουμε σχήμα Horner:

2	15	-38	2
	4	38	
2	19	0	

Επομένως $2x^2+15x-38=(x-2)(2x+19)$,άρα

$$\lim_{x\to2}\frac{2x^2+15x-38}{\sqrt{x^2-3}-\sqrt{5x-9}}=\lim_{x\to2}\frac{(x-2)(2x+19)}{\sqrt{x^2-3}-\sqrt{5x-9}}=\lim_{x\to2}\frac{(x-2)(2x+19)\left(\sqrt{x^2-3}+\sqrt{5x-9}\right)}{\left(\sqrt{x^2-3}-\sqrt{5x-9}\right)\left(\sqrt{x^2-3}+\sqrt{5x-9}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to2}\frac{(x-2)(2x+19)\left(\sqrt{x^2-3}+\sqrt{5x-9}\right)}{\left(\sqrt{x^2-3}\right)^2-\left(\sqrt{5x-9}\right)^2}=\lim_{x\to2}\frac{(x-2)(2x+19)\left(\sqrt{x^2-3}+\sqrt{5x-9}\right)}{x^2-5x+6}$$

Για το x^2-5x+6 θα κάνουμε σχήμα Horner:

1	-5	6	2
	2	-6	
1	-3	0	

Επομένως $x^2-5x+6=(x-3)(x-2)$,άρα

$$\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(2x+19)\left(\sqrt{x^2-3}+\sqrt{5x-9}\right)}{(x-3)(x-2)}=\lim_{x\to 2}\frac{(2x+19)\left(\sqrt{x^2-3}+\sqrt{5x-9}\right)}{x-3}=\frac{23\cdot 2}{-1}=-46$$

Δ) Έχουμε $g(x)=\dfrac{2x-1}{\sqrt{f'(x)}+\sqrt{5}}=\dfrac{2x-1}{\sqrt{3x^2+9x-30}+\sqrt{5}}$

Για να ορίζεται η g(x) πρέπει:

- $3x^2+9x-30\geq 0$

Έχουμε λοιπόν το πινακάκι:

x	$-\infty$ -5	2	$+\infty$
$3x^2+9x-30$	+	−	+

Άρα $3x^2+9x-30\geq 0 \Leftrightarrow x\in\left(-\infty,-5\right]\cup\left[2,+\infty\right)$

επιπλέον πρέπει:

- $\sqrt{3x^2+9x-30}+\sqrt{5}\neq 0\Leftrightarrow$
  $\sqrt{3x^2+9x-30}\neq-\sqrt{5}$
  που ισχύει για κάθε $x\in\left(-\infty,-5\right]\cup\left[2,+\infty\right)$ αφού
  $\sqrt{3x^2+9x-30}\geq 0$ για $x\in\left(-\infty,-5\right]\cup\left[2,+\infty\right)$

Επομένως η g ορίζεται για κάθε $x\in(-\infty,-5]\cup[2,+\infty)$