ΦΥΣΙΚΗ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ – ΜΗΧΑΝΙΚΗ ΣΤΕΡΕΟΥ ΣΩΜΑΤΟΣ

ΘΕΜΑ Α

*Στις ερωτήσεις **Α1-Α4** να επιλέξετε τη σωστή απάντηση.*

Α1. Σε ελεύθερο ακίνητο στερεό σώμα, που βρίσκεται πάνω σε λείο οριζόντιο επίπεδο, ασκείται ζεύγος οριζόντιων δυνάμεων. Η κίνηση που θα κάνει το στερεό είναι:

α. μόνο μεταφορική β. μόνο στροφική

γ. σύνθετη δ. ακινησία

Α2. Μια χορεύτρια του πάγου συμπτύσσει τα χέρια της μεταβάλλοντας τη ροπή αδράνειάς της κατά 20%. Η κινητική της ενέργεια:

α. Θα μειωθεί κατά 20% β. Θα μειωθεί κατά 25%

γ. Θα αυξηθεί κατά 25% δ. Θα αυξηθεί κατά 20%

Α3. Σε στερεό που περιστρέφεται γύρω από σταθερό άξονα ενεργεί σταθερή ροπή. Τότε αυξάνεται με σταθερό ρυθμό:

α. η ροπή αδράνειας του στερεού β. η κινητική ενέργεια του στερεού

γ. η στροφορμή του στερεού δ. η γωνιακή επιτάχυνση του στερεού

Α4. Ομογενής σφαίρα με ροπή αδράνειας Ι ως προς κέντρο μάζας κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει σε κεκλιμένο επίπεδο. Το πηλίκο της κινητικής ενέργειας λόγω μεταφοράς προς την κινητική ενέργεια λόγω περιστροφής είναι σταθερό και ίσο με:

α. $\frac{mR^2}{I}$ β. $\frac{mR}{I}$ γ. $\frac{I}{mR^2}$ δ. $\frac{R^2}{mI}$

Α5. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη Σωστό, αν η πρόταση είναι σωστή, ή τη λέξη Λάθος αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

α) Η ροπή ζεύγους δυνάμεων είναι ίδια ως προς οποιοδήποτε σημείο.

β) Γνωρίζουμε ότι το κλίμα στον πλανήτη αλλάζει, ανεβαίνει η θερμοκρασία και λιώνουν οι πάγοι. Άρα η περίοδος περιστροφής της Γης στο μέλλον θα αυξηθεί.

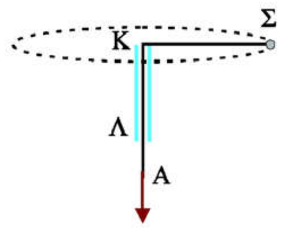
γ) Η ροπή αδράνειας ως προς άξονα ενός στερεού έχει τη μικρότερη τιμή της, όταν ο άξονας αυτός διέρχεται από το κέντρο μάζας του στερεού.

δ) Η ελκτική δύναμη που δέχεται η Γη από τον Ήλιο βοηθά στη μεταβολή της στροφορμής της λόγω spin.

ε) Ένα σώμα δεν μπορεί να έχει μία χρονική στιγμή γωνιακή ταχύτητα μηδέν και γωνιακή επιτάχυνση διαφορετική από το μηδέν.

ΘΕΜΑ Β

Β1. Το σφαιρίδιο Σ του σχήματος μάζας m διαγράφει κυκλική τροχιά με σταθερή γωνιακή ταχύτητα, ω_1, ακτίνας R. Το σκοινί στο οποίο είναι δεμένο το σφαιρίδιο περνάει από κατακόρυφο σωλήνα ΚΛ. Ασκώντας κατάλληλη δύναμη στο ελεύθερο άκρο Α του σκοινιού μειώνουμε την ακτίνα περιστροφής του σφαιριδίου στη μισή της αρχικής.



Α. Το σφαιρίδιο θα περιστρέφεται με γωνιακή ταχύτητα:

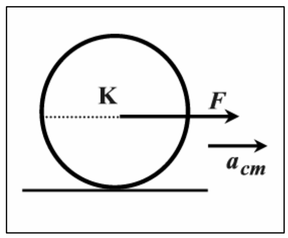
α) $\omega_2=4\omega_1$ β) $\omega_2=2\omega_1$ γ) $\omega_2=\omega_1$ δ) $\omega_2=\omega_1/2$

Β. Το έργο της δύναμης που ασκήσαμε θα είναι:

α) $m\omega_1^2R^2$ β) $m\omega_1^2\frac{R^2}{2}$ γ) $2m\omega_1^2R^2$ δ) $3m\omega_1^2\frac{R^2}{2}$

Να επιλέξετε τις σωστές απαντήσεις και να δικαιολογήσετε τις απαντήσεις σας.

Β2. Η κοίλη σφαίρα του σχήματος με $I_{cm}=2mR^2/3$ είναι ακίνητη πάνω στο οριζόντιο έδαφος. Ο συντελεστής οριακής τριβής μεταξύ σφαίρας και εδάφους είναι μ. Ασκούμε οριζόντια σταθερή δύναμη $\vec{F}$ της οποίας ο φορέας διέρχεται από το κέντρο της σφαίρας όπως φαίνεται στο σχήμα. Η σφαίρα κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει αν η τιμή της δύναμης F είναι:

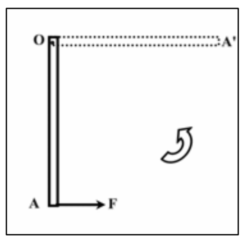


α.F>μmg β.F<μmg **γ.**F<2,5μmg δ.F>3μmg

Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση και να δικαιολογήσετε την επιλογή σας.

Β3. Μια ομογενής ράβδος μήκους ΟΑ=L μπορεί να στρέφεται σε κατακόρυφο επίπεδο γύρω από οριζόντιο άξονα που διέρχεται από σημείο Ο. Σε μια στιγμή t=0 και ενώ είναι κατακόρυφη και ακίνητη ασκείται στο άκρο Α δύναμη σταθερού μέτρου F=mg/4 που παραμένει συνεχώς κάθετη στη ράβδο.

Η ράβδος αποκτάει μέγιστη γωνιακή ταχύτητα όταν θα έχει διαγράψει γωνία θ ως προς την κατακόρυφο τέτοια ώστε:

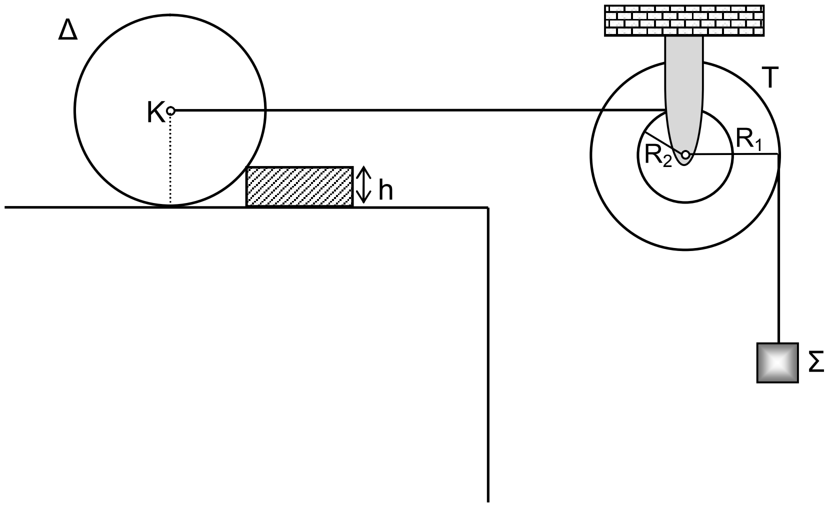


α) ημθ = 1 β) $ημθ = \frac{\sqrt{2}}{2}$ γ) $ημθ = \frac{1}{2}$

Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση και να δικαιολογήσετε την επιλογή σας.

<u>ΘΕΜΑ Γ</u>

Η διπλή τροχαλία Τ του σχήματος αποτελείται από δύο συγκολλημένους, ομοαξονικούς, συμπαγείς και ομογενείς δίσκους (1) και (2) με μάζες M_1 = 2,5 kg και M_2 = 5 kg και ακτίνες R_1= 1 m και R_2 = 0,5 m αντίστοιχα. Η διπλή τροχαλία μπορεί να στρέφεται, χωρίς τριβές, γύρω από σταθερό οριζόντιο άξονα που διέρχεται από το κέντρο της και είναι κάθετος στο επίπεδό της.



Στην περιφέρεια των δίσκων της τροχαλίας είναι τυλιγμένα αβαρή, μη εκτατά νήματα. Το άκρο του νήματος που είναι τυλιγμένο γύρω από τον δίσκο (2) είναι προσδεδεμένο με κατάλληλη αβαρή διάταξη στο κέντρο μάζας λεπτού ομογενούς δίσκου Δ, μάζας $M_Δ$ = 3 kg και ακτίνας $R_Δ$, ο οποίος μπορεί να κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει σε οριζόντιο επίπεδο. Στο άκρο του νήματος που είναι τυλιγμένο γύρω από τον δίσκο (1) κρέμεται σώμα Σ, μάζας m. Μπροστά από τον δίσκο Δ βρίσκεται εμπόδιο ύψους h= 0,4$R_Δ$ και ο δίσκος Δ ισορροπεί οριακά, ώστε να μην υπερπηδά το εμπόδιο.

α) Να υπολογίσετε τη μάζα m του σώματος Σ

Τη χρονική στιγμή t_0 = 0 αφαιρούμε το εμπόδιο με αποτέλεσμα ο δίσκος να αρχίσει αμέσως να κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει στο οριζόντιο επίπεδο, η τροχαλία να στρέφεται και το σώμα Σ να κατέρχεται.

β) Να υπολογίσετε την επιτάχυνση με την οποία κατέρχεται το σώμα Σ καθώς και το μέτρο της τάσης του νήματος που ασκείται στο κέντρο του δίσκου.

γ) Να υπολογίσετε τον ελάχιστο συντελεστή στατικής τριβής μεταξύ του δίσκου και του επιπέδου ώστε αυτός να κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει.

Τη χρονική στιγμή t_1 = 2 s κόβουμε ακαριαία το νήμα που συνδέει τον δίσκο με την τροχαλία Τ. Μετά το κόψιμο του νήματος, αυτό δεν εμποδίζει την κίνηση του δίσκου και του σώματος Τ. Ο δίσκος συνεχίζει την κίνησή του εκτελώντας κύλιση χωρίς ολίσθηση.

δ) Να υπολογίσετε το διάστημα που έχει διανύσει το κέντρο μάζας του δίσκου από τη χρονική στιγμή t_0 = 0 έως τη χρονική στιγμή t_2 = 6 s

ε) Να υπολογίσετε το λόγο της κινητικής ενέργειας του δίσκου προς την κινητική ενέργεια της τροχαλίας τη στιγμή t_1 = 2 s.

- Η ροπή αδράνειας ομογενούς δίσκου μάζας M και ακτίνας R ως προς άξονα κάθετο στο επίπεδό του που διέρχεται από το κέντρο του είναι $I=\frac{1}{2}MR^2$
- Δίνεται η επιτάχυνση της βαρύτητας $g=10m/s^2$
- Να θεωρήσετε ότι το σώμα Σ είναι πολύ μικρών διαστάσεων.
- Η αντίσταση του αέρα θεωρείται αμελητέα.

ΛΥΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1.β, Α2.γ, Α3.γ, Α4.α, Α5. α) Σ, β) Σ, γ) Σ, δ) Λ, ε) Λ

ΘΕΜΑ Β

Β1. Α) Αφού $\Sigma\tau_{\varepsilon\xi}=0$ μπορούμε να εφαρμόσουμε την αρχή διατήρησης της στροφορμής για το σφαιρίδιο:

$$\vec{L}_{\alpha\rho\chi}=\vec{L}_{\tau\varepsilon\lambda}\rightarrow mu_1R=mu_2\frac{R}{2}\rightarrow m\omega_1RR=m\omega_2\frac{R}{2}\frac{R}{2}\rightarrow\omega_2=4\omega_1$$

Σωστή απάντηση το (α)

Β) Εφαρμόζοντας το θεώρημα μεταβολής της κινητικής ενέργειας:

$$K_{\tau\varepsilon\lambda}-K_{\alpha\rho\chi}=\Sigma W\rightarrow\frac{1}{2}mu_2{}^2-\frac{1}{2}mu_1{}^2=W_F\rightarrow\frac{1}{2}m(\omega_2\frac{R}{2})^2-\frac{1}{2}m(\omega_1R)^2=W_F\rightarrow$$

$$\frac{1}{2}m16\omega_1{}^2\frac{R^2}{4}-\frac{1}{2}m\omega_1{}^2R^2=\frac{4}{2}m\omega_1{}^2R^2-\frac{1}{2}m\omega_1{}^2R^2=\frac{3}{2}m\omega_1{}^2R^2$$

Σωστή απάντηση το (δ)

Β2. Για να κυλιέται χωρίς να ολισθαίνει η σφαίρα πρέπει να ισχύει $T\le\mu_\sigma F_N$

$\Sigma F_\psi=0\Rightarrow w=F_N$

$\Sigma F_x=ma_{cm}\Rightarrow F-T_{\sigma\tau}=ma_{cm}$ (1)

$\Sigma\tau=Ia_{\gamma\omega\nu}\Rightarrow T_{\sigma\tau}R=\frac{2}{3}mR^2\frac{a_{cm}}{R}\Rightarrow T_{\sigma\tau}=\frac{2}{3}ma_{cm}\Rightarrow ma_{cm}=\frac{3T_{\sigma\tau}}{2}$ (2)

Οι (1) και (2) $F-T_{\sigma\tau}=\frac{3T_{\sigma\tau}}{2}\Rightarrow F=\frac{5T_{\sigma\tau}}{2}\Rightarrow T_{\sigma\tau}=\frac{2F}{5}$

Άρα $\frac{2F}{5}\le\mu_\sigma w\Rightarrow F\le 2.5\mu_\sigma mg$

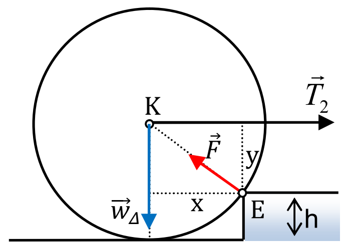
Σωστή απάντηση το (γ)

Β3. Στη θέση μέγιστης γωνιακής ταχύτητας η γωνιακή επιτάχυνση ισούται με μηδέν, άρα και η συνισταμένη των ροπών ισούται με μηδέν. Συνεπώς στη θέση αυτή ισχύει:

$$\Sigma\tau=0\rightarrow mg\frac{l}{2}\eta\mu\theta=Fl\rightarrow mg\frac{l}{2}\eta\mu\theta=\frac{mg}{4}l\rightarrow\eta\mu\theta=\frac{1}{2}$$

Σωστή απάντηση το (γ)

ΘΕΜΑ Γ



α) Επειδή ο δίσκος ισορροπεί οριακά, έχει μόλις χάσει την επαφή του με το οριζόντιο επίπεδο. Έτσι σε αυτόν ασκούνται το βάρος του $\vec{w}_\Delta$, η τάση του νήματος $\vec{T}_2$ και η δύναμη $\vec{F}$ από το σημείο επαφής Ε του δίσκου με το εμπόδιο. Στην οριακή αυτή ισορροπία θα πρέπει:

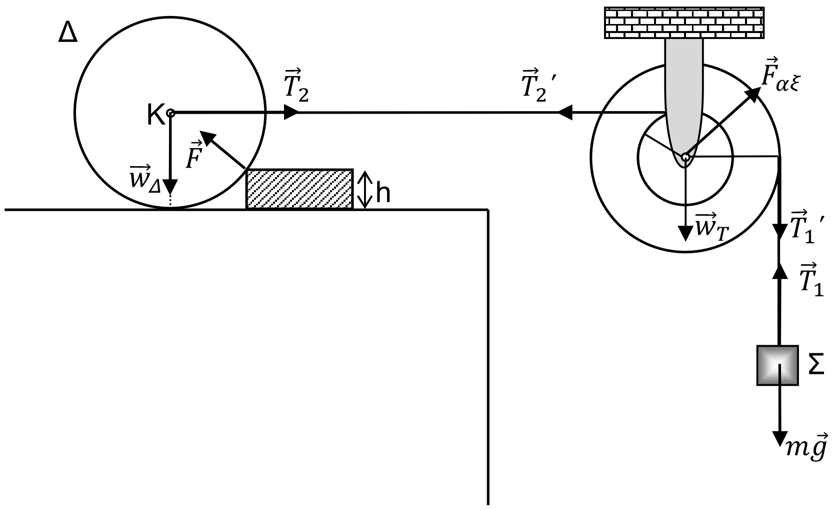
$\Sigma\tau_E = 0 \Rightarrow T_2 y = w_\Delta x \Rightarrow T_2(R_\Delta - h) = M_\Delta g x \Rightarrow 0{,}6 T_2 R_\Delta = M_\Delta g x$

Αλλά στο σχήμα βλέπουμε ότι:

$R_\Delta^2 = x^2 + (R_\Delta - h)^2 \Rightarrow x = \sqrt{R_\Delta^2 - (R_\Delta - 0{,}4R_\Delta)^2} \Rightarrow x = 0{,}8R_\Delta$ οπότε η προηγούμενη σχέση δίνει:

$0{,}6 T_2 R_\Delta = 0{,}8 M_\Delta g R_\Delta \Rightarrow T_2 = \dfrac{4M_\Delta g}{3} \Rightarrow T_2 = 40N$

Στο σχήμα φαίνονται όλες οι δυνάμεις που ασκούνται στα σώματα που ισορροπούν.



Επειδή τα νήματα είναι αβαρή ισχύει: $T_1 = T_1{}'$ και $T_2 = T_2{}'$.

Για την ισορροπία της διπλής τροχαλίας: $\Sigma\tau_{cm} = 0 \Rightarrow T_1{}'R_1 = T_2{}'R_2 \Rightarrow 2T_1R_2 = T_2R_2 \Rightarrow T_1 = \frac{T_2}{2}$ οπότε προκύπτει: $T_1 = 20N$.

Για την ισορροπία του σώματος Σ: $\Sigma F = 0 \Rightarrow mg = T_1 \Rightarrow 10m = 20 \Rightarrow m = 2kg$

β) Στο σχήμα που ακολουθεί φαίνονται οι δυνάμεις που ασκούνται στα επιμέρους σώματα του συστήματος μετά την αφαίρεση του εμποδίου. Τα μέτρα των τάσεων των νημάτων και της $\vec{F}_{\alpha\xi}$ έχουν αλλάξει σε σχέση με το προηγούμενο ερώτημα.

Η ροπή αδράνειας της διπλής τροχαλίας ως προς τον άξονα περιστροφής της είναι:

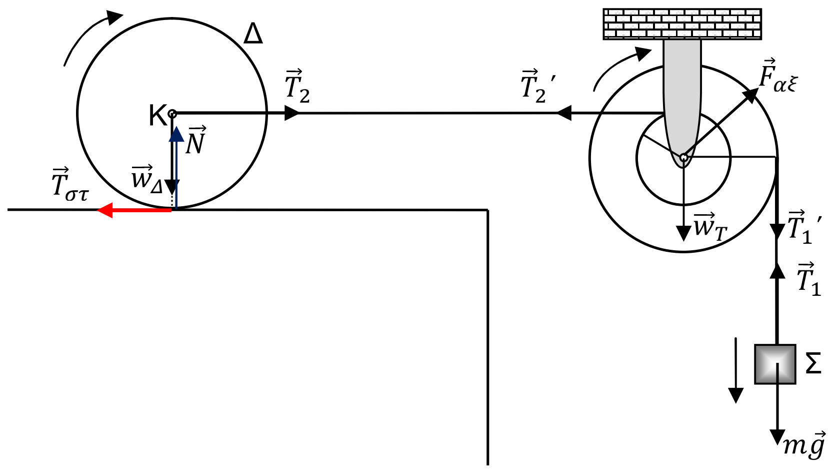
$$I_{o\lambda} = I_1 + I_2 \Rightarrow I_{o\lambda} = \frac{1}{2}M_1R_1^2 + \frac{1}{2}M_2R_2^2 \Rightarrow I_{o\lambda} = 1{,}875\,kg\cdot m^2$$

Για την κίνηση του σώματος Σ έχουμε:

$\Sigma F = m\alpha \Rightarrow mg - T_1 = m\alpha \Rightarrow 20 - T_1 = 2\alpha$ (1)

Για την τροχαλία ισχύει:

$\Sigma\tau_{cm} = I_{o\lambda}\,\alpha_{\gamma\omega\nu(T)} \Rightarrow T_1{}'R_1 - T_2{}'R_2 = I_{o\lambda}\,\alpha_{\gamma\omega\nu(T)} \Rightarrow T_1 - 0{,}5T_2 = 1{,}875\,\alpha_{\gamma\omega\nu(T)}$ (2)



Για τον δίσκο ισχύει:

$\Sigma F_x = M_\Delta a_{cm} \Rightarrow T_2 - T_{\sigma\tau} = M_\Delta a_{cm} \Rightarrow T_2 - T_{\sigma\tau} = 3a_{cm}$ (3)

$\Sigma\tau_{cm} = I_{cm}\, a_{\gamma\omega\nu(\Delta)} \Rightarrow T_{\sigma\tau}R_\Delta = \frac{1}{2}M_\Delta R_\Delta^2 a_{\gamma\omega\nu(\Delta)} \Rightarrow T_{\sigma\tau} = \frac{1}{2}M_\Delta R_\Delta a_{\gamma\omega\nu(\Delta)}$

Επειδή όμως ισχύει $a_{cm} = a_{\gamma\omega\nu(\Delta)}R_\Delta$, καθώς ο δίσκος εκτελεί κύλιση χωρίς ολίσθηση, η προηγούμενη σχέση γράφεται:

$T_{\sigma\tau} = \frac{1}{2}M_\Delta a_{cm} \Rightarrow T_{\sigma\tau} = \frac{3}{2}a_{cm}$ (4)

Επειδή τα νήματα είναι μη εκτατά και δεν ολισθαίνουν στα αυλάκια της τροχαλίας, έχουμε ότι:

$a_{cm} = a_{\gamma\omega\nu(T)}R_2 \Rightarrow a_{cm} = 0{,}5a_{\gamma\omega\nu(T)}$ και $a = a_{\gamma\omega\nu(T)}R_1 \Rightarrow a = a_{\gamma\omega\nu(T)}$ οπότε και $a_{cm} = \frac{a}{2}$

Έτσι λοιπόν, οι (1), (2), (3) και (4) γράφονται:

$$\left.\begin{aligned} 20 - T_1 &= 2a \\ T_1 - 0{,}5T_2 &= 1{,}875a \\ T_2 - T_{\sigma\tau} &= 1{,}5a \\ T_{\sigma\tau} &= 0{,}75a \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} 40 - 2T_1 &= 4a \\ 2T_1 - T_2 &= 3{,}75a \\ T_2 - T_{\sigma\tau} &= 1{,}5a \\ T_{\sigma\tau} &= 0{,}75a \end{aligned}\right\} \xrightarrow{\text{πρόσθεση κατά μέλη}} 40 = 10a \Rightarrow a = 2\ \text{m/s}^2$$

Με βάση αυτό το αποτέλεσμα, προκύπτουν από τις παραπάνω σχέσεις:

$a_{cm} = 1\ \text{m/s}^2$, $a_{\gamma\omega\nu(T)} = 2\ \text{rad/s}^2$, $T_{\sigma\tau} = 1{,}5\text{N}$, $T_1 = 16\ \text{N}$ και $T_2 = 4{,}5\ \text{N}$

γ) Αφού πρέπει ο δίσκος να κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει στο δάπεδο, θα ισχύει:

$$T_{\sigma\tau} \le T_{o\rho} \Rightarrow T_{\sigma\tau} \le \mu_s N \xrightarrow{N = M_\Delta g} \mu_s \ge \frac{T_{\sigma\tau}}{M_\Delta g} \Rightarrow \mu_s \ge 0{,}05$$

Συνεπώς η ελάχιστη τιμή του συντελεστή στατικής τριβής είναι $\mu_{s,min} = 0{,}05$

δ) Το διάστημα που διανύει ο δίσκος έως την $t_1 = 2$ s είναι:

$s_1 = \frac{1}{2}a_{cm}t_1^2 \Rightarrow s_1 = 2\,\text{m}$

Από την t_1 και μετά που καταργείται η $\vec{T}_2$, ο δίσκος εκτελεί ομαλή κίνηση μεταφορικά και στροφικά. Η ταχύτητα του κέντρου μάζας του δίσκου την $t_1 = 2$ s είναι:

$\upsilon_{cm,1} = a_{cm} t_1 \Rightarrow \upsilon_{cm,1} = 2\,m/s$ και με αυτήν συνεχίζει.

Άρα από t_1 = 2 s έως t_2 = 6 s διανύει:

$s_2 = \upsilon_{cm,1} \Delta t \Rightarrow s_2 = 8\,m$.

Άρα το συνολικό διάστημα είναι: $s_{ολ} = s_1 + s_2 \Rightarrow s_{ολ} = 10$ m

ε) Η γωνιακή ταχύτητα της τροχαλίας την t_1 = 2 s είναι:

$\omega_1 = a_{γων(Τ)} t_1 = 4$ rad/s.

Ο ζητούμενος λόγος είναι:

$$\frac{K_\Delta}{K_T} = \frac{\frac{1}{2}M_\Delta \upsilon_{cm,1}^2 + \frac{1}{2}I_{cm}\omega^2}{\frac{1}{2}I_{ολ}\omega_1^2} = \frac{\frac{1}{2}M_\Delta \upsilon_{cm,1}^2 + \frac{1}{2}\frac{1}{2}M_\Delta R_\Delta^2\omega^2}{\frac{1}{2}I_{ολ}\omega_1^2} = \frac{\frac{1}{2}M_\Delta \upsilon_{cm,1}^2 + \frac{1}{4}M_\Delta \upsilon_{cm,1}^2}{\frac{1}{2}I_{ολ}\omega_1^2} = \frac{\frac{1}{4}M_\Delta \upsilon_{cm,1}^2}{\frac{1}{2}I_{ολ}\omega_1^2}$$

και με αντικατάσταση προκύπτει: $\frac{K_\Delta}{K_T} = \frac{6}{5}$