

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

ΛΥΣΕΙΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑΤΟΣ

ΘΕΜΑ Α

A1. Σχολικό βιβλίο σελίδα 143.

A2. Σχολικό βιβλίο σελίδα 51.

A3. Σχολικό βιβλίο σελίδα 217.

A4. i) Σ ii) Λ iii) Λ iv) Λ v) Σ

ΘΕΜΑ Β

B1. Για να είναι η $x=1$ ασύμπτωτη της C_f αρκεί η f να μην ορίζεται στο 1. Άρα, το 1 να είναι ρίζα του $x - \kappa^2$.

Άρα $1 - \kappa^2 = 0 \Leftrightarrow \kappa = 1 \text{ ή } \kappa = -1$

- Για $\kappa=1$ έχω $f(x) = \frac{x^2 + x + 2}{x - 1}$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x^2 + x + 2) \cdot \frac{1}{x - 1} = 4 \cdot (+\infty) = +\infty$$

αφού $\lim_{x \rightarrow 1^+} (x - 1) = 0$ και $x - 1 > 0$ κοντά στο 1^+

άρα η $\kappa=1$ δεκτή λύση

- Για $\kappa = -1$ έχω $f(x) = \frac{x^2 + x - 2}{x - 1} = \frac{(x + 2)(x - 1)}{x - 1} = x + 2$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x + 2) = 3$$

άρα η $\kappa = -1$ απορρίπτεται.

Επομένως για $\kappa = 1$, η $x = 1$ κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f .

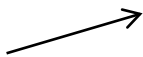
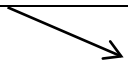
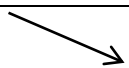
B2. Για $\kappa=1$ έχω $f(x) = \frac{x^2 + x + 2}{x-1}, x \in \mathbb{R} - \{1\}$

Η f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R} - \{1\}$, με

$$f'(x) = \frac{(x^2 + x + 2)' \cdot (x-1) - (x^2 + x + 2) \cdot (x-1)'}{(x-1)^2} =$$

$$\frac{(2x+1)(x-1) - x^2 - x - 2}{(x-1)^2} = \frac{x^2 - 2x - 3}{(x-1)^2}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = -1 \text{ ή } x = 3$$

x	$-\infty$	-1	1	3	$+\infty$
$(x-1)^2$	+	+	+	+	
$x^2 - 2x - 3$	+	-	-	+	
f'	+	-	-	+	
f					

- Η f είναι γνησίως αύξουσα στα διαστήματα $(-\infty, -1]$, $[3, +\infty)$.
- Η f είναι γνησίως φθίνουσα στα διαστήματα $[-1, 1)$, $(1, 3]$.

Η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο $x_0 = -1$, $f(-1) = -1$

και τοπικό ελάχιστο στο $x_1 = 3$, $f(3) = 7$

B3. Η f' παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R} - \{1\}$, με

$$f''(x) = \frac{(x^2 - 2x - 3)' \cdot (x-1)^2 - (x^2 - 2x - 3) \cdot [(x-1)^2]'}{(x-1)^4} = \frac{(2x-2)(x-1)^2 - 2(x-1)(x^2 - 2x - 3)}{(x-1)^4}$$

$$= \frac{2(x-1)[(x-1)^2 - x^2 + 2x + 3]}{(x-1)^4} = \frac{2(x^2 - 2x + 1 - x^2 + 2x + 3)}{(x-1)^3} = \frac{8}{(x-1)^3}$$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$(x-1)^3$	-		+
f''	-		+
f			

Η f είναι κοίλη στα $(-\infty, 1)$ και κυρτή στο $(1, +\infty)$. Η f δεν παρουσιάζει σημεία καμπής.

$$\text{B4. } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{x^2 + x + 2}{x-1}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + x + 2}{x^2 - x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1 = \lambda$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2 + x + 2}{x-1} - x \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2 + x + 2 - x^2 + x}{x-1} \right) =$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2x + 2}{x-1} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2x}{x} \right) = 2 = \beta$$

άρα η $y = x + 2$ πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$.

$$\text{Έστω } h(x) = f(x) - y = \frac{x^2 + x + 2}{x-1} - x - 2 = \frac{4}{x-1}$$

Η h συνεχής και $h(x) > 0$ στο $[2, 3]$.

$$\text{Επομένως έχουμε } E = \int_2^3 h(x) dx = \int_2^3 \frac{4}{x-1} dx = \left[4 \ln |x-1| \right]_2^3 = 4 \ln 2 \text{ τετραγωνικές μονάδες}$$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Για κάθε $x > 0$ είναι

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(1 - \frac{1}{x} \right)' \cdot \ln x + \left(1 - \frac{1}{x} \right) \cdot (\ln x)' \\ &= \frac{1}{x^2} \cdot \ln x + \left(1 - \frac{1}{x} \right) \cdot \frac{1}{x} \\ &= \frac{\ln x}{x^2} + \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} \\ &= \frac{\ln x + x - 1}{x^2} \end{aligned}$$

Για κάθε $x > 1$ είναι $\ln x > 0$, $x - 1 > 0$, άρα $f'(x) > 0$ και αφού η f είναι συνεχής στο $x_0 = 1$, θα είναι $f \uparrow [1, +\infty)$.

Για κάθε $x \in (0, 1)$ είναι $\ln x < 0$, $x - 1 < 0$, άρα $f'(x) < 0$ και αφού η f είναι συνεχής στο $x_0 = 1$, θα είναι $f \downarrow (0, 1]$.

Η f παρουσιάζει στο $x_0 = 1$ ολικό ελάχιστο

το $f(1) = 0$.

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	—	+	
$f(x)$	$\searrow$		$\nearrow$

Γ2. Για $x > 0$ είναι

$$\begin{aligned}
 f''(x) &= \frac{(\ln x + x - 1)' \cdot x^2 - (\ln x + x - 1) \cdot (x^2)'}{x^4} \\
 &= \frac{\left(\frac{1}{x} + 1\right) \cdot x^2 - (\ln x + x - 1) \cdot 2x}{x^4} \\
 &= \frac{x + x^2 - 2x \cdot \ln x - 2x^2 + 2x}{x^4} \\
 &= \frac{-2x \cdot \ln x - x^2 + 3x}{x^4} \\
 &= \frac{-2 \ln x - x + 3}{x^3}
 \end{aligned}$$

Θέτω $g(x) = -2 \ln x + 3 - x$, $x \in A = (0, +\infty)$. Τότε είναι $f''(x) = \frac{g(x)}{x^3}$, $x > 0$.

Για $x > 0$: $g'(x) = -\frac{2}{x} - 1 < 0$, άρα $g \downarrow (0, +\infty)$.

Η g είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο $A = (0, +\infty)$, άρα $g(A) = \left(\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x), \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x)\right)$.

- $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (-2 \cdot \ln x + 3 - x) = +\infty$, αφού $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$ και $\lim_{x \rightarrow 0^+} (3 - x) = 3$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (-2 \cdot \ln x + 3 - x) = -\infty$, αφού $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} (3 - x) = -\infty$.

Οπότε $g(A) = (-\infty, +\infty)$.

$0 \in g(A)$ και $g \downarrow A$, άρα υπάρχει μοναδικό $x_0 \in A$ τέτοιο ώστε $g(x_0) = 0$, άρα και $f''(x_0) = 0$.

Για κάθε $x \in (0, x_0)$ είναι $x < x_0 \stackrel{g \downarrow}{\Leftrightarrow} g(x) > g(x_0) \Leftrightarrow g(x) > 0$, άρα και $f''(x) > 0$.

Για κάθε $(x_0, +\infty)$ είναι $x > x_0 \stackrel{g \downarrow}{\Leftrightarrow} g(x) < g(x_0) \Leftrightarrow g(x) < 0$, άρα και $f''(x) < 0$.

Η $f''(x)$ αλλάζει πρόσημο εκατέρωθεν του x_0 και η C_f δέχεται εφαπτομένη στο $(x_0, f(x_0))$, άρα τελικά υπάρχει μοναδικό $x_0 > 0$ τέτοιο ώστε το $(x_0, f(x_0))$ να είναι σημείο καμπής της C_f .

Γ3. Η εξίσωση γράφεται ισοδύναμα $(x-1) \cdot f'(x_0) + (x-2)(x-\eta\mu x) = 0$. (1)

Έστω $h(x) = (x-1) \cdot f'(x_0) + (x-2)(x-\eta\mu x)$, $x \in [1, 2]$.

Η h είναι συνεχής στο $[1, 2]$ και επίσης έχουμε :

- $h(1) = \eta\mu 1 - 1 < 0$ αφού για $x > 0$ ισχύει $\eta\mu x < x$
- $h(2) = f'(x_0)$

Είναι $f''(x_0) = 0 \Leftrightarrow \frac{-2\ln x_0 + 3 - x_0}{x_0^3} = 0 \Leftrightarrow 2\ln x_0 = 3 - x_0 \Leftrightarrow \ln x_0 = \frac{3 - x_0}{2}$, επομένως

$$f'(x_0) = \frac{\ln x_0 + x_0 - 1}{x_0^2} = \frac{\frac{3 - x_0}{2} + x_0 - 1}{x_0^2} = \frac{3 - x_0 + 2x_0 - 2}{2x_0^2} = \frac{x_0 + 1}{2x_0^2} > 0, \text{ άρα } h(2) > 0$$

Άρα $h(1) \cdot h(2) < 0$.

Σύμφωνα με το θεώρημα Bolzano η εξίσωση $h(x) = 0$, δηλαδή η εξίσωση (1) έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $(1, 2)$.

Γ4. Είναι $E = \int_1^e |f(x)| dx$.

Για κάθε $x \in [1, e]$ είναι $1 \leq x \stackrel{f \uparrow}{\Leftrightarrow} f(1) \leq f(x) \Leftrightarrow f(x) \geq 0$, άρα έχουμε

$$\begin{aligned} E &= \int_1^e f(x) dx = \int_1^e \left(1 - \frac{1}{x}\right) \cdot \ln x dx = \int_1^e \ln x dx - \int_1^e \frac{1}{x} \ln x dx = \int_1^e (x)' \ln x dx - \left[\frac{1}{2} \ln^2 x\right]_1^e \\ &= [x \cdot \ln x]_1^e - \int_1^e x \cdot \frac{1}{x} dx - \frac{1}{2} = e - 1 \cdot (e - 1) - \frac{1}{2} = e - e + 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

ΘΕΜΑ Δ

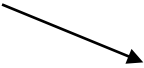
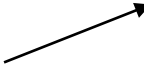
Δ1.i) Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ $f'(x) = e^x - \lambda$

- Για $\lambda \leq 0$, $f'(x) > 0$ άρα f γνησίως αύξουσα για κάθε $x \in \mathbb{R}$
- Για $\lambda > 0$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow e^x - \lambda = 0 \Rightarrow e^x = \lambda \Rightarrow x = \ln \lambda$$

$$f'(x) > 0 \Rightarrow e^x - \lambda > 0 \Rightarrow e^x > \lambda \Rightarrow x > \ln \lambda$$

$$f'(x) < 0 \Rightarrow e^x - \lambda < 0 \Rightarrow e^x < \lambda \Rightarrow x < \ln \lambda$$

x	$-\infty$	$\ln \lambda$	$+\infty$
f'	-		+
f			

Επομένως f γνησίως φθίνουσα για $x \in (-\infty, \ln \lambda]$ και f γνησίως αύξουσα για $x \in [\ln \lambda, +\infty)$

ii) Από το παραπάνω ερώτημα έχουμε ότι η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο για κάθε $\lambda > 0$ στη θέση $x = \ln \lambda$ το $f(\ln \lambda) = e^{\ln \lambda} - \lambda \ln \lambda = \lambda - \lambda \ln \lambda = \lambda(1 - \ln \lambda)$

Δ2.

- Για $\lambda = 0$: $f(x) = e^x > 0$, άρα η $f(x) = 0$ είναι αδύνατη
- Για $\lambda < 0$ f γν. αύξουσα και συνεχής στο $\mathbb{R}$, άρα $f(A) = \left(\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right) = \mathbb{R}$ αφού:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (e^x - \lambda x) = -\lambda(-\infty) = \lambda(+\infty) \stackrel{\lambda < 0}{=} -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x - \lambda x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x \left(1 - \lambda \frac{x}{e^x} \right) = (+\infty)(1 - 0) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x}{e^x} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{e^x} \right) = \lim_{y \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{y} \right) = 0$$

Άρα $0 \in f(A)$ και f 1-1 στο A άρα η $f(x) = 0$ έχει μοναδική ρίζα για $\lambda < 0$

- Για $\lambda > 0$ από το πρώτο ερώτημα έχουμε ότι η f παρουσιάζει ελάχιστο και ισχύει $f(x) \geq \lambda(1 - \ln \lambda)$. Το πρόσημο της παράστασης $\lambda(1 - \ln \lambda)$ φαίνεται παρακάτω:

λ	0	e	$+\infty$
λ	+	+	+
$1 - \ln \lambda$	+	-	-
$\lambda(1 - \ln \lambda)$	+	-	-

Επομένως

- Για $\lambda = e$ ισχύει $f(x) \geq 0$ με την ισότητα να ισχύει για $x = \ln e = 1$
- Για $\lambda \in (0, e)$, $\lambda(1 - \ln \lambda) > 0$, δηλαδή $f(x) > 0$ επομένως η εξίσωση $f(x) = 0$ είναι αδύνατη

- Για $\lambda \in (e, +\infty)$ έχουμε τα διαστήματα $\Delta 1 = (-\infty, \ln \lambda]$ όπου f γνησίως φθίνουσα και συνεχής και $\Delta 2 = (\ln \lambda, +\infty)$ όπου f γνησίως αύξουσα και συνεχής, άρα

$$f(\Delta 1) = [f(\ln \lambda), \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)) = [\lambda(1 - \ln \lambda), +\infty)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (e^x - \lambda x) = -\lambda(-\infty) = \lambda(+\infty) \stackrel{\lambda > 0}{=} +\infty$$

$$f(\Delta 2) = [\lim_{x \rightarrow \lambda^+} f(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)) = (\lambda(1 - \ln \lambda), +\infty)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x - \lambda x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x \left(1 - \lambda \frac{x}{e^x}\right) = (+\infty)(1 - 0) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x}{e^x}\right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{e^x}\right) = \lim_{y \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{y}\right) = 0$$

Επομένως $0 \in f(\Delta 1)$, $0 \in f(\Delta 2)$ και f 1-1 στα $\Delta 1$ και $\Delta 2$ άρα η $f(x) = 0$ έχει ακριβώς δύο ρίζες

Συνοπτικά:

Για $\lambda < 0$ η $f(x) = 0$ έχει μοναδική λύση

Για $\lambda \in [0, e)$ η $f(x) = 0$ είναι αδύνατη

Για $\lambda = e$ η $f(x) = 0$ έχει μοναδική λύση

Για $\lambda > e$ η $f(x) = 0$ έχει ακριβώς δύο λύσεις

Δ3. Έστω ότι η C_f εφάπτεται στον x στο σημείο $M(x_0, f(x_0))$, τότε ισχύει:

$$\begin{cases} f'(x_0) = 0 \\ f(x_0) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} e^{x_0} - \lambda = 0 \\ e^{x_0} - \lambda x_0 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} e^{x_0} = \lambda \\ \lambda - \lambda x_0 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} e^{x_0} = \lambda \\ \lambda(1 - x_0) = 0 \end{cases} \stackrel{\lambda \neq 0}{\Rightarrow} \begin{cases} \lambda = e \\ x_0 = 1 \end{cases}$$

*($\lambda \neq 0$ αφού η $f(x) = 0$ αδύνατη για $\lambda = 0$)

Επομένως $f(x) = e^x - ex$, $f'(x) = e^x - e$

Δ4. Από πρώτο ερώτημα η f παρουσιάζει ελάχιστο για $x = \ln \lambda \stackrel{\lambda=e}{=} 1$ το $f(1)=0$, άρα $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Για $x > 0$ η εξίσωση γίνεται:

$$2e^x - 2(ex - x + 1) - \ln x^2 = 0 \Leftrightarrow 2e^x - 2(ex - x + 1) - 2\ln x = 0 \Leftrightarrow$$

$$e^x - (ex - x + 1) - \ln x = 0 \Leftrightarrow e^x - ex + x - 1 - \ln x = 0 \Leftrightarrow$$

$$(e^x - ex) + (x - 1 - \ln x) = 0$$

$$\text{Όμως } \begin{cases} e^x - ex \geq 0 \\ \ln x \leq x - 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(x) \geq 0 \\ x - 1 - \ln x \geq 0 \end{cases} \quad (\ln x \leq x - 1, \text{ με τη νισότητα να ισχύει για } x = 1)$$

$$\text{Άρα η εξίσωση έχει λύση αν και μόνο αν: } \begin{cases} f(x) = 0 \\ x - 1 - \ln x = 0 \end{cases} \Rightarrow x = 1$$